Un modelo integral de la curva modular perfectoide

Motivación:

Teorema: la cohomología completada

$$\hat{H}^1 = \left(\varinjlim_n H^1(X(Np^n)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_p)\right)^{\wedge p}$$

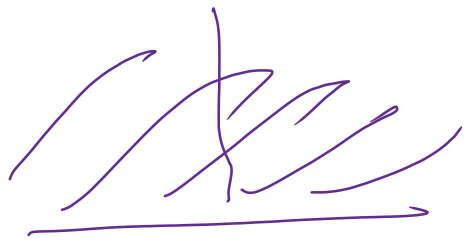
$X(Np^\infty)$ la curva modular perfectoide.

$$H^1_{an}(X(Np^\infty)_{\mathbb{C}_p}, \mathcal{O}_{X(Np^\infty)})[\tfrac{1}{p}]$$

$$\shortparallel$$

$$\hat{H}^1 \otimes \mathbb{C}_p$$

$$\mathfrak{h} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

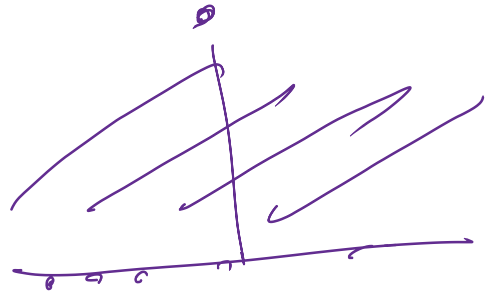


$M \in \mathbb{N}$, $\quad \Gamma(M) \subseteq GL_2(\mathbb{Z})$

$$\Gamma(M) = \{A \in GL_2(\mathbb{Z}) \mid A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod M\}.$$

$$Y(M) = \Gamma(M) \backslash \mathfrak{h} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

compactificamos $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$



$$X(M) = \Gamma(M) \backslash \mathfrak{h}^*$$

Fijamos $N \geq 3$, p primo, $p \nmid N$.

$$\Gamma(Np^{n+1}) \subseteq \Gamma(Np^n)$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d] \\ X(Np^2) \arrow[d] \\ X(Np) \arrow[d] \\ X(N) \end{tikzcd}$$

$$X(Np^\infty) \text{ "="} \varprojlim_n X(Np^n)$$

* Modulos enteros de Katz Mazur
* Anillos integrales perfectoides.
* enunciado del teorema
* idea de la prueba

§ Modelos de Katz Mazur.

$N \geq 3$, p primo $p \nmid N$. $n \geq 0$

S esquema, E/S curva elíptica

($S = \operatorname{Spec} R$, $2, 3 \in R^\times$ $\quad E = \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2 \mid zy^2 = x^3 + axz^2 + bz^3\}$ $\quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0$)

Sea $M \in \mathbb{N}$, $E[M]$ la M-torsión de E

. Vemos a $E[M]$ como un divisor de E/S.

Def Una base de Drinfeld de $E[M]$ es una aplicación

$$\varphi : (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^2 \longrightarrow E[M] \quad \text{t.q.}$$

$$E[M] = \sum_{(a,b) \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^2} \varphi(a,b)$$

Obs. Si $M \in \mathcal{O}(S)^\times$, una base de Drinfeld es lo mismo que $E[M] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^2$.

Sea $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ consideremos

$$\text{“}Y(Np^n)\text{”} : (Sch/_{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \text{Sets.}$$

$$X \rightsquigarrow \{(E/X, \ \psi : (\mathbb{Z}/Np^n\mathbb{Z})^2 \to E[Np^n])\}/_{\sim}$$

<u>Teorema</u> (Katz-Mazur) “$Y(Np^n)$” es representado por un esquema afín, regular sobre $\mathbb{Z}$, de dim rel. 1, étale sobre $\mathbb{Z}[\frac{1}{Np^n}]$.

$Y(Np^n)$ curva modular de nivel $\Gamma(Np^n)$

∘ $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\zeta_{Np^n}]$.

• $j : Y(Np^n) \longrightarrow \mathbb{A}^1_S \subseteq \mathbb{P}^1_S$

Definimos a $X(Np^n)$ como la clausura integral de $\mathbb{P}^1$

Tomamos $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \\ X(Np^2) & & [E, (P, Q)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(Np) & & ((E, (p\cdot P, p\cdot Q)) \\ \downarrow & & \\ X(N) & & \end{array}$$

§ Anillos íntegros perfectoides

([BMS])

Def. Un anillo íntegro perf. R es un anillo top. t.q.

1) $\pi \in R$ no divisor de zero t.q. R tiene la top. π.

$\left(R = \varprojlim_n R/\pi^n \right)$

2) $\pi^p \mid p$

3) $\Phi : R/\pi \xrightarrow{\sim} R/\pi^p$ Frobenius.

- Esquema formal afín perfectoide $\mathrm{Spf}\, R$
- $\mathfrak{X}$ esquema formal es perfectoide si $\exists$ $\{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento de $\mathfrak{X}$ t.q. U_i es afín formal perf.

Prop. $\mathfrak{X}$ formal perfectoide con la top p-ádica (i.e. $\mathfrak{X}/\mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p$ y p no es divisor de 0)

$$\mathfrak{X} \rightsquigarrow (\mathfrak{X})_\eta$$

$$\begin{array}{ccc} \cup\!\mid & & \\ \mathrm{Spf}\, R & \rightsquigarrow & \mathrm{Spa}\left(\underbrace{R\left[\tfrac{1}{p}\right]}, R^+ \right) \end{array}$$

la fibra genérica.

§ Enunciado del teorema

Sea $\mathfrak{X}(Np^n)_{/\mathrm{Spf}\,\mathbb{Z}_p}$ la completación p-ádica de $X(Np^n)$

$$\mathrm{Sp}\,\hat{R}_\infty \qquad \varprojlim \mathrm{Spf}\,\hat{R}_n \qquad \hat{R}_\infty = (\varinjlim_n R_n)^{\wedge p}$$

<u>Teorema</u> $\mathfrak{X}(Np^\infty) = \varprojlim \mathfrak{X}(Np^n)$ es un esquema formal perfectoide, con fibra genérica naturalmente isomorfa a $X(Np^\infty)$ "$\simeq$" $\varprojlim_n X^{an}(Np^n)$.

<u>Obs.</u> Ya fue mostrado por Lurie.

<u>Prueba:</u> Si $\mathrm{Spec}\,R_0 \subseteq X(N)$ abierto, y para $m \geq 0$ $\mathrm{Spec}\,R_m \subseteq X(Np^m)$ es su imagen inversa,

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \downarrow & & \uparrow \\ X(Np^{m+1}) & \supset & R_{m+1} \\ \downarrow & & \uparrow \\ X(Np^m) & & R_m \end{array} \qquad \hat{R}_\infty := (\varinjlim_n R_n)^{\wedge p}$$

es integral perfectoide.

Sobre $X(Np^n)$, $E[p^n] \times E[p^n] \to \mu_{p^n}$

$$(\mathbb{Q}_n, P_n) \longmapsto \zeta_{p^n}$$

La base de Dorifeld

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}(N_{p^{n+1}}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spf}(\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^{n+1}}]) \arrow[d] \\
\mathfrak{X}(N_{p^n}) \arrow[r] \arrow[d, "\times p"] & \operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}] \arrow[d, "\wedge p"] \\
\mathfrak{X}(N_{p^{n-1}}) \arrow[r] & \operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^{n-1}}]
\end{tikzcd}$$

- $\mathfrak{X}(N_{p^\infty}) \longrightarrow \operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p^{cyc}$

  $\mathbb{Z}_p^{cyc} = \left(\varinjlim_n \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]\right)^{\wedge p}$

- $\pi = (\zeta_{p^2} - 1)^{p-1}$, $\pi^p = u \cdot p$, $u \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^2}]^\times$

- π define la top. de $\mathfrak{X}(N_{p^\infty})$

- $\pi^p \mid p$

Queremos mostrar

$$\Phi : \tilde{R}_\infty/\pi \xrightarrow{\sim} \tilde{R}_\infty/\pi^p$$

<u>Inyectividad</u>. $R_\infty = \varinjlim_n R_n$

- R_n es un anillo regular $\forall n$, en particular R_n es int.

cerrado en $R_n[\frac{1}{p}]$.

Luego, ($\hat{R}_\infty/\pi = R_\infty/\pi$), sea $x \in R_n$ t.q

$x^p \in \pi^p R_n \Rightarrow x \in \pi R_n$

$\left(\left(\frac{x}{\pi}\right)^p \in R_n \Rightarrow \frac{x}{\pi} \in R_n \right).$

<u>Subsobreyectividad</u>

<u>Idea:</u> Trabajar en los stalks de $\mathcal{X}(Np^\infty)$

y usar faithfully flat descent

$\leadsto \breve{\mathbb{Z}}_p = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$, y $X(Np^n)_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$.

<u>Localizando en stalks:</u>

$(x_n) \in \varprojlim_n \operatorname{Spf} \hat{R}_n \subseteq \varprojlim_n \mathcal{X}(Np^n)$ (cerrados).

Faithfully flat descent,

$$\Phi : \varinjlim_n (\hat{R}_{n,x_n})^{\wedge - m_{x_n}} \longrightarrow \varinjlim_n (\hat{R}_{n,x_n})^{\wedge - m_{x_n}}$$

$$\left(\otimes_{\hat{R}_0} (\hat{R}_{0,x_0})^{\wedge - m_{x_0}} \right)$$

Obs.- Necesitamos calcular explícitamente

$$\left(\varprojlim_{n} (\hat{R}_{n,x_n}) \right)^{1-m_{x_0}}$$

- Ordinario (Serre-Tate coordinates)

$$(\hat{R}_{n,x_n})^{1-m_{x_n}} = \mathbb{Z}_p[\xi_{p^n}][[T_n - 1]]$$

$$T_{n+1}^{p} = T_n.$$

- Cuspidal (Caso Tate $\mathbb{G}_m / q^{\mathbb{Z}}$ en $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[[q]][\frac{1}{q}]$).

$$(\hat{R}_{n,x_n})^{1-m_{x_n}} \cong \mathbb{Z}_p[\xi_{p^n}][[q^{1/p^n}]]$$

- Supersingulares: No hay descripción a nivel finito, pero usando el grupo formal de $\mathcal{E}$, uno muestra que

$$(\hat{R}_{n,x_n})^{1-m_{x_n}} \Big/ \varpi^{p} \cong \Phi\left((\hat{R}_{n+1,x_n})^{1-m_{x_{n+1}}} \Big/ \varpi \right).$$

$\blacksquare$

Aplicacion: ω_E el haz de diferenciales invariantes

$E / \mathcal{X}(Np^\infty)$.

$$H^i(\mathcal{X}(Np^\infty), \omega_E^k) = \begin{cases} 0 & i \geq 2 \\ 0 & i = 1,\ k > 0 \\ 0 & i = 0,\ k < 0 \end{cases}$$

$$H^1(\mathcal{X}(Np^\infty), \omega_E^1)$$

- $$\hat{H}^1 = \left(\varinjlim_n H^1_{et}(X(Np^n)_{\bar{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p)\right)^{\wedge p}.$$

$$\left(\hat{H}^1 \hat{\otimes} \mathbb{C}_p\right)^\vee = \varinjlim_{\widetilde{\mathrm{Tr}_n}} \left(H^0(\mathcal{X}(Np^n), \omega_E^2(-D_n)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\right)\left[\tfrac{1}{p}\right]$$

$GL_2(\mathbb{Q}_p)$