Funções L automorfas e identidades espectrais

I. Formas automorfas.

i) Seja G um grupo de Lie

($\underline{G = GL_n(\mathbb{R})}$, ou $G = O_n(\mathbb{R})$)

e $\Gamma \subset G$ um subgrupo discreto.

(e.g. $\underline{\Gamma \leq GL_n(\mathbb{Z})}$, $\Gamma = O_n(\mathbb{Z})$?)

Uma forma automorfa é $f : G \to \mathbb{C}$ que satisfaz

$\rightarrow$ 1. $f(\gamma g) = f(g) \ \forall \gamma \in \Gamma$

2. f auto-vetor de certos operadores diferenciais ($\mathfrak{g} \curvearrowright G$)

3. certas cond. de crescimento.

<u>Exemplo</u>: $G = GL_2(\mathbb{R})$ recaímos sobre os conceitos de <u>formas modulares</u> e <u>formas</u> <u>de</u> <u>Maass</u>

ii) seja G um grupo algébrico redutivo (exemplo: $G = GL_n, O_n, Sp_{2n}$)

e F um corpo de números.

$$\mathbb{A}_F = \text{adeles sobre } F$$
$$= \prod_v{}' F_v .$$

Uma forma automorfa nesse contexto é uma função $\phi : G(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ satisfazendo 1), 2) e 3) com $\Gamma = G(F)$.

II. Representações automorfas.

Grosseiramente:

$$L^2(\Gamma \backslash G) = \underbrace{\bigoplus_{\pi} V_\pi}_{\text{Representações automorfas.}} + \underbrace{(\cdots)}$$

— // — // — // —

• Funções L: $s \mapsto L(s, \pi)$

$s \in \mathbb{C}$.

guarda bastante informação sobre π.

a) $L(s,\pi) = \sum_{\underline{a} \in I(F)} \frac{\lambda_\pi(\underline{a})}{N(\underline{a})^s} \quad (\operatorname{Re}(s) \gg 1)$

b) $L(\cdot,\pi)$ possui ext. meromorfa a $\mathbb{C}$.

c) $L(s,\pi) = \prod_{p} \frac{1}{S_\pi(p^{-s})}$, $(\mathrm{Re}(s) >> 1)$

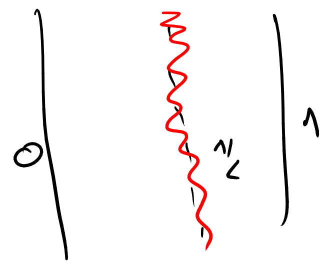
S_π é um polinômio e $P = N(\mathfrak{p})$

d) $L(1-s,\pi) \longleftrightarrow L(s,\tilde{\pi})$
dual.

ζ : Hipótese de Riemann (HR)

$\zeta(s) = 0$ e $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ então

$\mathrm{Re}(s) = 1/2$



HR $\Rightarrow$ Hipótese de Lindelöf:

$\zeta(1/2 + it) \ll_\varepsilon |t|^\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$

—— // —— // —— // —— // ——

HRG : $L(s,\pi) = 0$, $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) = 1/2$

$\Downarrow$

HLG : $\boxed{L(1/2,\pi)} \ll \underbrace{\mathrm{cond}(\pi)}_{\text{complexidade}}{}^{\varepsilon}$.

$\pi = \chi$ de dirichlet

$\mathrm{cond}(\chi) = q$ menor módulo

tal que χ é induzida

por um caráter de módulo

- <u>Rankin-Selberg</u>

π_1 é uma rep. automorfa de GL_{n_1}/F

π_2 é —"— de GL_{n_2}/F

$$\rightsquigarrow L(s, \pi_1 \times \pi_2).$$

Em GL_n existe uma rep. $\mathcal{E}_n$ dita de <u>Eisenstein</u> tal que

$$L(s, \pi_1 \times \mathcal{E}_n) = L(s, \pi_1)^n.$$

<u>Momentos</u>

$$\rightsquigarrow \sum_{\pi \in X} L(s, \pi)^k \, h(\pi)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{\pi \in X} L(s, \pi \times \pi_0) \, h(\pi)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{\pi \in X} L(s, \pi \times \pi_1) \, L(s, \pi \times \pi_2) \, h(\pi)$$

<u>Identidades espectrais</u>.

1. Motohashi (~1990)

$$\int_{\mathbb{R}} |\zeta(1/2+it)|^4 h(t) = \sum_{\pi \text{ de } GL_2/\mathbb{Q}} L(1/2,\pi)^3 \tilde{h}(\pi).$$

$h \longleftrightarrow \tilde{h}$
+ renormalização integral

$$\int_T^{2T} |\zeta(1/2+it)|^4 = T\,P(\log T) + O(T^{1-\delta}).$$

---

2. Conrey-Iwaniec (2000)
(Michel-Venkatesh, Nelson, ----)

$$\sum_{\substack{\pi \text{ de } GL_2/\mathbb{Q} \\ \operatorname{cond}(\pi)=q}} L(1/2,\pi\times\chi_q)^3 h(\pi) = \sum_{\omega \,(\mathrm{mod}\, q)} \int_{\mathbb{R}} |L(1/2+it,\omega)|^4 \tilde{h}(t,\omega)\,dt$$

χ_q caráter de Dirichlet quad.

---

3. Blomer-Khan: $\to \Pi_0$ rep. de $GL_3/\mathbb{Q}$

$$\sum_{\substack{\pi \text{ de } GL_2/\mathbb{Q} \\ \operatorname{cond}(\pi)=q}} \underbrace{L(1/2,\cancel{\Pi_0}\times\pi)^3 \cdot L(1/2,\pi)}_{L(1/2,\pi)^4} \lambda_\pi(\ell)\, h(\pi) = \sum_{\substack{\pi \text{ de } GL_2/\mathbb{Q} \\ \operatorname{cond}(\pi)=\ell}} \underbrace{L(1/2,\cancel{\Pi_0}\times\pi)^3 L(1/2,\pi)}_{L(1/2,\pi)^4} \lambda_\pi(q)\, \tilde{h}(\pi)$$

LF ≠ LD

Teo (N-, 2021):

A mesma coisa sobre um corpo de números qualquer

* . No meu caso preciso super π_0 cuspidal ($\pi_0 \neq \mathcal{E}_3$)

Bl-Kh. Sobre $\mathbb{Q}$

$\to$ $$L(s_1, \pi_0 \times \pi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_{\pi_0}(n)\lambda_\pi(n)}{n^{s_1}}$$

$\to$ $$L(s_2, \pi) = \sum_{r \geq 1} \frac{\lambda_\pi(r)}{r^{s_2}}.$$

$\to$ Kuznetsov (Resultado espectral)

$$\sum_\pi \lambda_\pi(a)\lambda_\pi(b) = \dots$$

Voronoi (Eq. funcional de $L(s,\pi)$ $\leftrightarrow$ $L(1-s,\tilde{\pi})$)

$\to$ Alguma transf. $\ell \leftrightarrow q$

$\to$ Kuznetsov ao contrário

Representações integrais

π_0 de GL_3, $\phi_{\pi_0} \in V_{\pi_0}$

π de GL_2, $\phi_\pi \in V_\pi$

$$L(s, \pi_0 \times \pi) = \int_{GL_2(F) \backslash GL_2(\mathbb{A}_F)} \phi_{\pi_0}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0\,0 & 1 \end{pmatrix} \phi_\pi(g) |\det g|^{s-1/2} dg$$

$$L(s, \pi) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times} \phi_\pi\begin{pmatrix} y & \\ & 1 \end{pmatrix} |y|^{s-1/2} d^\times y.$$

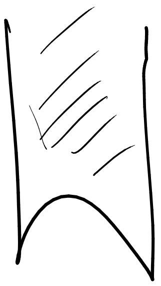
$$\sum_{\pi\ (\cancel{\mathrm{cond}\le q})} L(1/2, \pi_0 \times \pi)\, L(1/2, \pi) \leftarrow \cancel{\lambda_\pi(\ell)}\ \ell(\pi)$$

$$= \sum_{\pi} \langle \boxed{\phi_{\pi_0}|_{GL_2}}, \phi_\pi \rangle \int \phi_\pi \begin{pmatrix} y & \\ & 1 \end{pmatrix} d^\times y .$$

gren : 8.

$$= \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times} \phi_{\pi_0} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} d^\times y .$$

$$\int - - - \to \sum_{\pi} - - -$$



$\leftarrow |f_n(z)|$, $f_n \in \pi_n$

$n \to \infty$

$\mathrm{cond}(\pi_n) \to +\infty$

π_0 en GL_{n+1}, π_1 en GL_{n-1}

$$\sum_{\substack{\pi \text{ de } GL_n \\ \mathrm{cond}(\pi) = q}} L(1/2, \pi_0 \times \pi)\, L(1/2, \pi \times \pi_1)\, \lambda_\pi(\ell)$$

= mesma coisa $\ell \leftrightarrow q$.

gren $2n^2$.

$\to L(1/2, \pi) \ll (\mathrm{cond}\, \pi)^{1/4 - \delta}$

π de GL_3.