

Acoplamiento por la altura entre
ciclos superiores

y
estructuras de Hodge mixtas

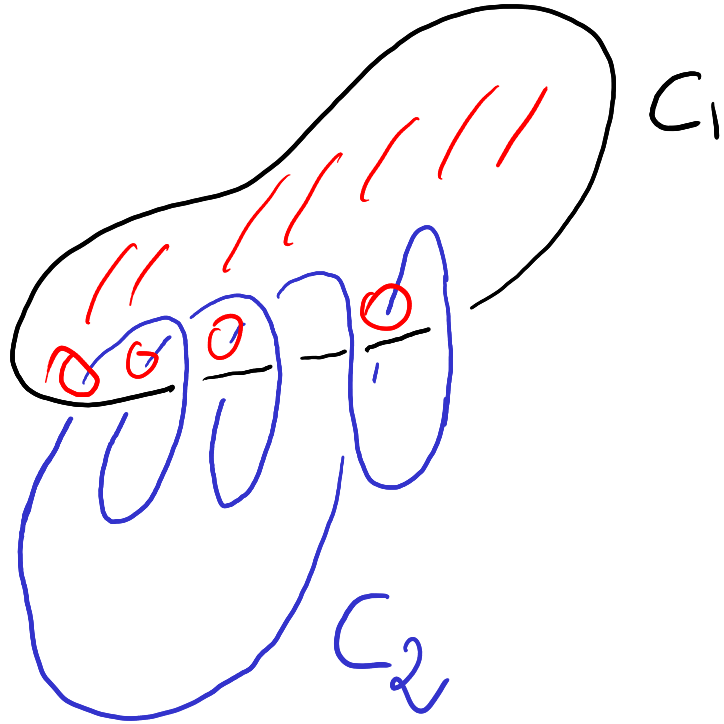
J.I. Burgos Gil (ICMAT)

LATeN 17/6/2021

Junto con S. Goswami y G. Pearlstein

Clases características secundarias

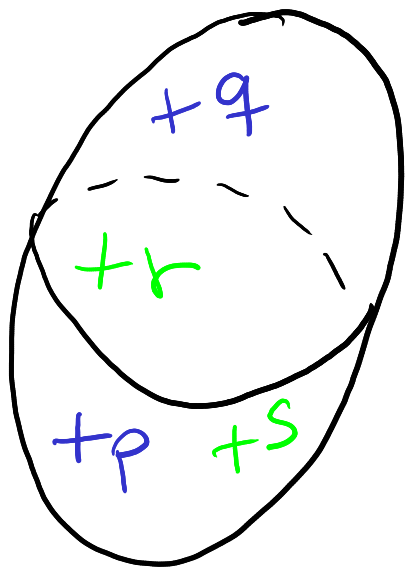
Número de enlace



$$\sigma: \partial \sigma = C_1$$

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \sigma \cdot C_2 \\ = 2$$

Ejemplo Algebraico



$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

ciclos $[p] - [q], [r] - [s]$

Existe una función racional
 f tal que

$$\text{div}(f) = \underline{[p] - [q]}$$

$$\begin{aligned} \langle [p] - [q], [r] - [s] \rangle &= f([r] - [s]) \\ &= f(r)/f(s) \end{aligned}$$

Concretamente

$$f = \frac{t-p}{t-q} ; \langle [p]-[q], [r]-[s] \rangle = \frac{r-p}{r-q} \cdot \frac{s-q}{s-p}$$

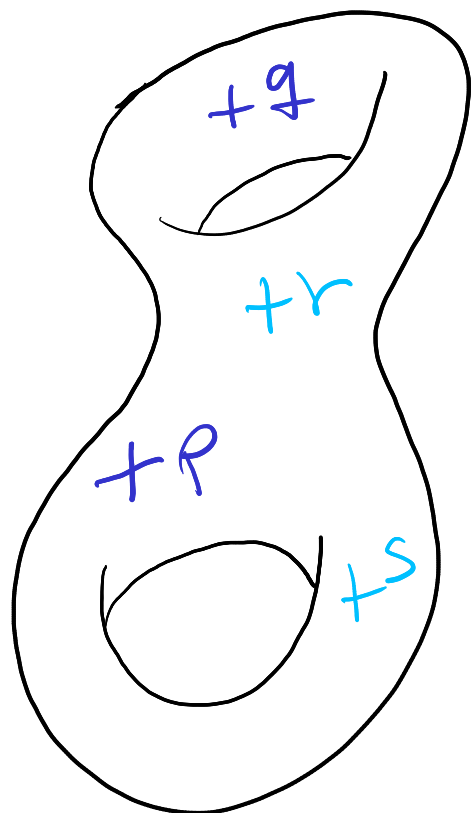
razón doble

$$= P(p, q; r, s)$$

En curvas de género $g \geq 1$

podemos construir el análogo de

$$\log |P(p, q; r, s)|$$



$X(4)$

En general

Podemos encontrar una función g tal que

* g es suave en $X(4) \setminus \{p, q\}$

* Cerca de p

$$g(t) = -\log|t-p| + \text{acotado}$$

Cerca de q

$$g(t) = \log|t-q| + \text{acotado}$$

* $\partial\bar{\partial}g = 0$

$$\langle [p] - [q], [r] - [s] \rangle_{\infty} = g(r) - g(s)$$

Si $X = \mathbb{P}^1$: $g(t) = -\log |f(t)|$

Si X está definida sobre $\mathbb{Q}$ (o un cuerpo de números) Z, W curvas de grado 0

$$\langle Z, W \rangle_H = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \langle Z, W \rangle_v$$

$v = \infty$
producto
que hemos def.

* Generalizado por Arakelov, Gillet-Soulé, ...

Componente Arquimediano de la altura.

X Variedad compleja de dimensión n

Z, W ciclos de codimensión p y q con $p+q=n+1$

Tales que :

- * $\mathcal{L}(Z) \in H_B^{2p}(X, \mathbb{R})$
- $\mathcal{L}(W) \in H_B^{2q}(X, \mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(Z) = \mathcal{L}(W) = 0$$

$$* \quad Z \cap W = \emptyset$$

Existe una forma diferencial g_z
tal que

• g_z es suave en $X \setminus Z$

• g_z tiene singularidades logarítmicas
a lo largo de Z

• $\frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} g_z = \delta_z$ (integración en z)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_X g_z \cdot \partial \bar{\partial} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \int_Z \omega$$

g_z es una forma de Green para Z

La componente Arquimediana del acoplamiento por la altura es

$$\langle z, w \rangle_\infty = \int_{\underline{w}} g z$$

- * Se puede extender a una teoría de intersección de ciclos aritméticos (Gillet-Soulé).
- * Se puede interpretar en términos de Estructuras de Hodge mixtas (Hain)

Estructuras de Hodge mixtas -

X variedad compacta Kähler *ej proyectiva*

$H^m(X, \mathbb{C})$ tiene:

* una estructura entera $H^m(X, \mathbb{Z})$

* Una descomposición

$$H^m(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(X)$$

$$H^{p,q}(X) = H^q(X, \Omega^p)$$

Si X es una variedad abeliana recuperamos X a partir de $H^1(X, \mathbb{C})$ con una estructura de Hodge

Si X no es compacta o no es suave
 $H^m(X, \mathbb{Q})$ Se puede construir a partir de
la cohomología de **Variedades suaves proyectivas**
Nos proporciona una **Estructura de Hodge**
mixta en $H^m(X, \mathbb{Q})$

- * Una filtración W en $H^m(X, \mathbb{Q})$ **pero**
- * Una filtración F en $H^m(X, \mathbb{C})$ **Hodge**
- * en cada $Gr_m^W H^m(X, \mathbb{Q})$, F induce
una estructura de Hodge pura de peso m .

Meta Teorema

- * Toda buena cohomología que proviene de la geometría tiene una EHM
- * Toda aplicación que viene de la resalta las EHM.

En particular, X proyectiva lisa, Z, U subvariedades
 $H(X), H(X \setminus Z), H(X, U), H(X \setminus Z; U \setminus Z)$
tienen estructuras de Hodge mixtas.

Volvemos al caso de los ciclos

X variedad *proyectiva y lisa* *dim* n

Z, W ciclos de codimensión p, q *$p+q=n+1$*

$$Z \cap W = \emptyset$$

$$d(Z) = d(W) = 0$$

Succession exacte longue $\mathbb{Z}$

$$H_{\mathbb{Z}}^{2p-1}(X) = 0$$

$$Cl(\mathbb{Z}) \hookrightarrow 0$$

↓

$$0 \rightarrow H^{2p-1}(X) \rightarrow H^{2p-1}(\underline{X \setminus |z|}) \rightarrow \underline{H_{\mathbb{Z}}^{2p}(X)} \rightarrow H^{2p}(X)$$

↑
groupe de perversité
 $2p-1$

↑
mixte

↑
groupe de perversité $2p$

Succession exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow H^{2p-1}(X) & \rightarrow & H^{2p-1}(X \setminus |z|) & \rightarrow & H_z^{2p}(X) & \rightarrow & H^{2p}(X) \\
 \parallel & & \uparrow & \searrow & \uparrow d(z) & & \uparrow \\
 0 \rightarrow \underline{H^{2p-1}(X)} & \rightarrow & \underline{E_z} & \rightarrow & \underline{Q(-p)} & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

E_z est la extension associée à z

Estimierung:

$(0, 2p-1)$
 $\dots$
 $(p-1, p)$
 (p, p)
 $(p, p-1)$
 $\dots$
 $(2p-1, 0)$

$= Q(-P)$

$= H^{2p-1}(x)$

Extension dual pair $\mathcal{V}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{H^{2M-2q}(X)} & \rightarrow & \underline{H^{2M-2q}(\mathcal{V})} & \rightarrow & \underline{H^{2M-2q+1}(X; \mathcal{V})} & \rightarrow & \underline{H^{2M-2q+1}(X)} \rightarrow 0 \\
 \downarrow \quad \text{||||} & & \downarrow \text{cl}(\mathcal{V}) & & & & \\
 0 & \rightarrow & Q(q-m) & & & &
 \end{array}$$

$$\dim \mathcal{V} = m - q$$

$$p + q = m + 1 \quad \Rightarrow$$

$$2M - 2q + 1 = \underline{2p - 1}$$

La extensión dual de V es:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{2n-2g}(X) & \rightarrow & H^{2n-2g}(U) & \rightarrow & H^{2n-2g+1}(X; U) & \rightarrow & H^{2n-2g+1}(X) \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow d(U) & & \downarrow \checkmark & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & Q(g-n) & \rightarrow & E_U^\vee & \rightarrow & \underline{H^{2p-1}(X)} \rightarrow 0
 \end{array}$$

E_Z $E_U^\vee$ componen $H^{2p-1}(X)$

¿Se pueden pegar?

Diagram

$$\textcircled{d(w)} \rightarrow Q(-p+1)$$

$$0 \rightarrow H^{2p-2}(w) \rightarrow H^{2p-2}(w|z) \rightarrow H^{2p-1}(w|z) \stackrel{=}{=} 0$$

$$0 \rightarrow H^{2p-1}(x; w) \rightarrow H^{2p-1}(x|z; \underline{w|z}) \rightarrow H_z^{2p}(x; w)$$

$$0 \rightarrow H^{2p-1}(x) \rightarrow H^{2p-1}(x|z) \rightarrow H_z^{2p}(x) \stackrel{=}{=} 0$$

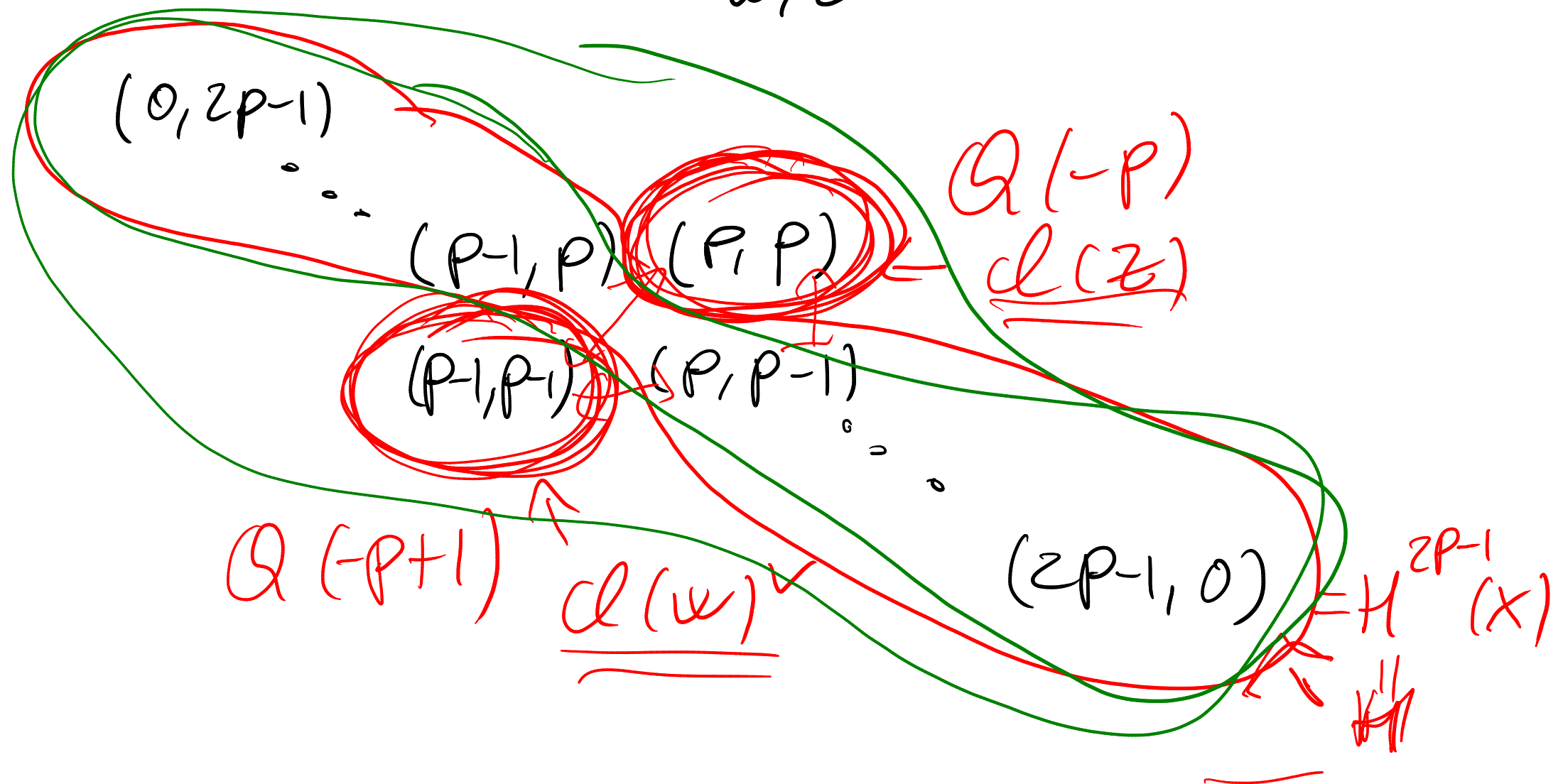
$$\textcircled{d(z)} \rightarrow Q(-p)$$

Del diagrama anterior deducimos

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{\downarrow} & Q(-p+1) & = & Q(-p+1) \xrightarrow{\downarrow} 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{\downarrow} & E_{u,v} & \rightarrow & B_{u,v,z} \rightarrow Q(-p) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{\downarrow} & H^{2p-1}(X) & \rightarrow & E_z \rightarrow Q(-p) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

(Note: In the original image, the first 0 in the first row is circled in red, and the $B_{u,v,z}$ term in the second row is enclosed in a red box.)

Estructura de $B_{w,z}$



biextensión de EHM

Teorema de Haim

Fijamos H una estructura de Hodge pura
de peso $2p-1$

En la categoría $MHS_{\mathbb{R}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de iso de} \\ \text{estructuras con la forma} \\ \text{de } B_{W,Z} \end{array} \right\} \xrightarrow[\sim]{\text{can}} \mathbb{R}$

$B_{W,Z} \xrightarrow{\quad} \langle W, Z \rangle_{\infty}$

Ciclos superiores (Versión algebraica)

$K_0(X)$ grupo K -de X fibrados vec. virtuales

$CH^*(X)$ grupo de Chow de ciclos

Si X proyectiva y lisa

$$K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{ch}]{\sim} CH^*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

K_0 se extiende a los grupos K_i $i \geq 0$

CH^* se extiende a los grupos $CH^*(X, m)$ $m \geq 0$

Notation

$$\square = \mathbb{P}^1 \setminus \{1\} \cong \mathbb{A}^1$$

$$\partial \square = \{0, \infty\}$$

$$\square^m = \square \times \cdots \times \square$$

$$\partial \square^m = \text{alguna coordenada igual a } 0 \text{ o } \infty.$$

$$\text{Case } \partial_j^i \square^m = \square \times \cdots \times \square \times \underbrace{\{j\}}_i \times \cdots \times \square$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, m \\ j &= 0, \infty \end{aligned}$$

$$\underline{j = 0, \infty}$$

cod $\rightarrow Z^p(X, \underline{m})_{\infty} =$ ciclos en $X \times D^m$
de codimensi3n p

Contar todas las caras propiamente

y adem3s $(\partial_j^i)^* z = 0$

para $i > 1$ $j = 0, \infty$; $i = 1$ $j = \infty$

aplicaci3n $(\partial_0^1)^* : Z^p(X, m) \rightarrow Z^p(X, m-1)$

$CH^p(X, m) := H_m(\underline{Z^p(X, *)}, \underline{(\partial_0^1)^*})$

Dos esquemas relativos

Em $(\mathbb{P}^1)^m$ definimos

$A \subseteq (\mathbb{P}^1)^m$ alguma coordenada $\perp$

$B \subseteq (\mathbb{P}^1)^m$ alguma coordenada vale $0 \text{ ou } \infty$

$$(G_m)^m = (\mathbb{P}^1)^m \setminus B \quad \square^m = (\mathbb{P}^1)^m \setminus A$$

Esquemas relativos

$$\square^m = (\square^m, B) \longleftrightarrow (G_m^m = (G_m^m, A))$$

dualidad

Cohomology

$$H^r(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Q}(0) & \text{si } r = n \\ 0 & r \neq n \end{cases}$$

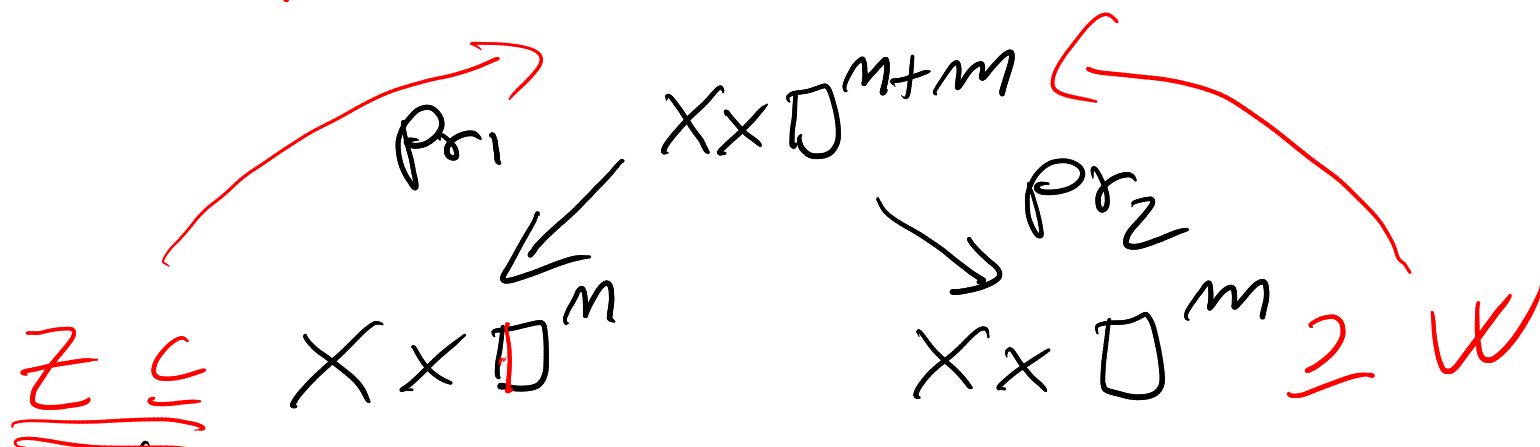
$$H^r(G_m^n) = \begin{cases} \mathbb{Q}(-n) & r = n \\ 0 & r \neq n \end{cases}$$

Ciclos superiores

$$\dim X = d$$

$$Z \in Z^p(X, m)_{oo} \quad W \in Z^q(X, m)_{oo}$$

con $2(p+q-d-1) = m+m$ *



$$\dim(\underline{pr_1^{-1} Z \cap pr_2^{-1} W}) = d + m + m - p - q$$

$$= \frac{m+m}{2} - 1$$

Escribimos $\tilde{X} = X \times \mathbb{A}^m \times \mathbb{G}_m^m$ $\tilde{Z} = Z \times \mathbb{G}_m^m$
 $\tilde{W} = W \times \mathbb{A}^m$

Así $H^r(\tilde{X}) = H^{r-m-m}(X)(-m)$

$\underline{cl}(Z) \in H^{2p}(X \times \mathbb{A}^m) = H^{2p-m}(X)$
 $= \underline{H}^{2p+m}(\tilde{X})(m)$

$cl(W) \in H^{2q}(X \times \mathbb{A}^m) = H^{2d+2m-2q}(\tilde{X} \times \mathbb{G}_m^m)^{\vee}(-d-q)$
 $= H^{2d+2m-2q+m}(\tilde{X})^{\vee}(-d-q) = \underline{H}^{2p+m-2}(\tilde{X})^{\vee}(-d-q)$

Gran diagrama (poco preciso)

$d(x) \rightarrow Q(q-m-d)$

$$H^{2p+m-2}(\tilde{U}) \rightarrow H^{2p+m-2}(\tilde{U} \setminus \tilde{Z}) \rightarrow H^{2p+m-1}(\tilde{U} \setminus \tilde{Z})$$

$$H^{2p+m-1}(\tilde{X} \setminus \tilde{U}) \rightarrow H^{2p+m-1}(\tilde{X} \setminus \tilde{Z}; \tilde{U} \setminus \tilde{Z}) \rightarrow H^{2p+m}(\tilde{X}; \tilde{U})$$

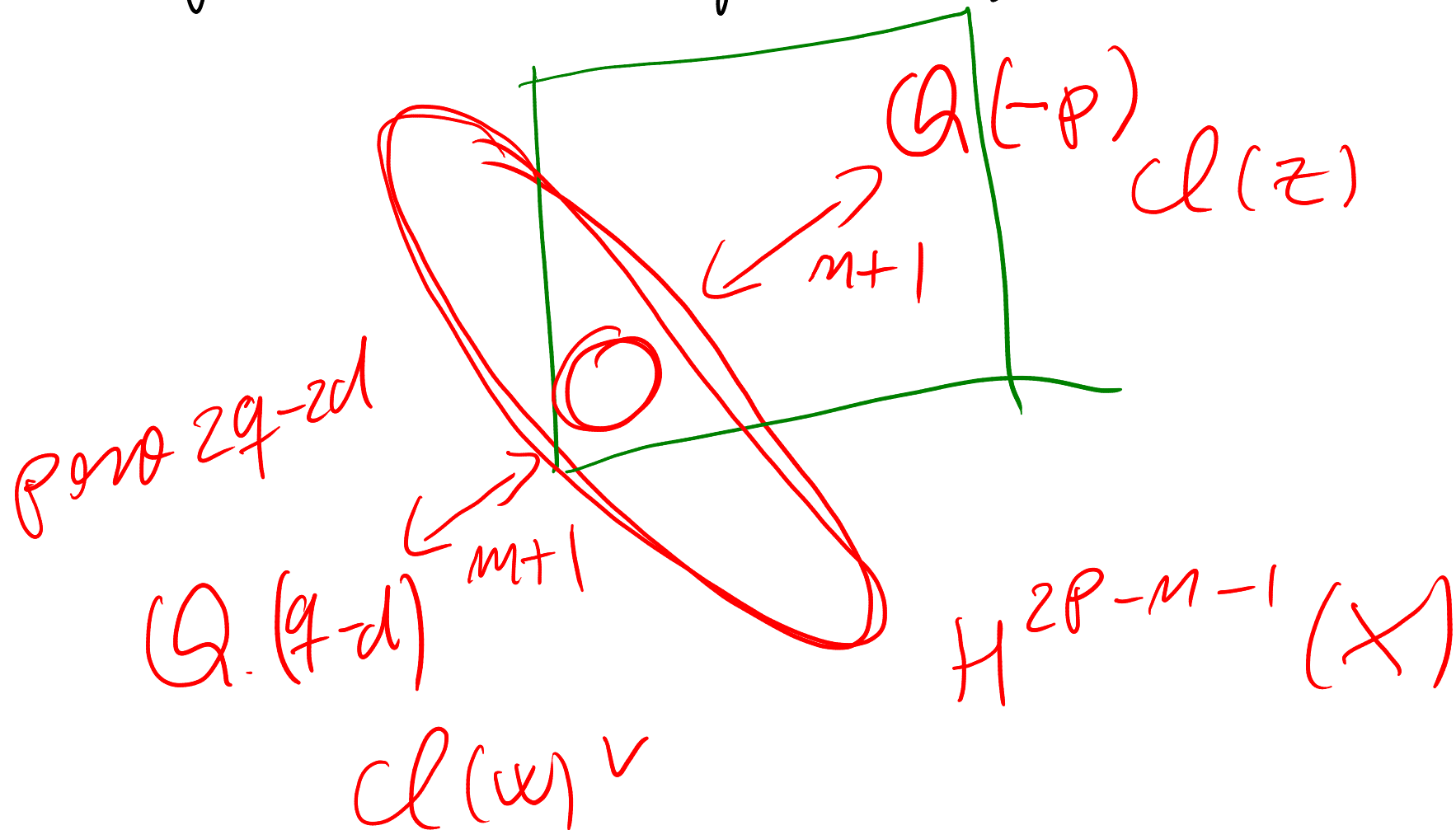
$$H^{2p+m-1}(\tilde{X}) \rightarrow H^{2p+m-1}(\tilde{X} \setminus \tilde{Z}) \rightarrow H^{2p+m}(\tilde{X})$$

$\parallel \downarrow_0$

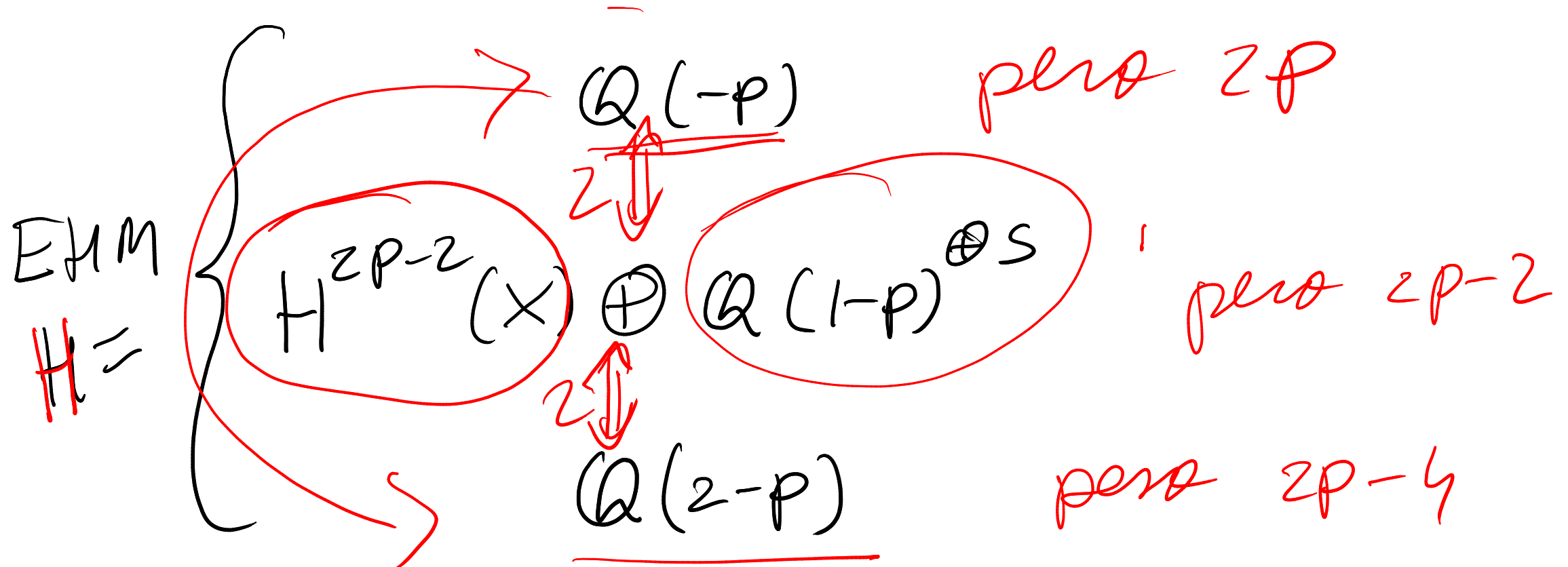
$$H^{2p-m-1}(X)(-m)$$

$\uparrow d(z)$
 $Q(-p-m)$

Obtenemos una EMM del siguiente tipo
(después de torcer por m)



Como $n = m = 1$
 $\dim \tilde{Z} \cap \tilde{W} = 0$ más fácil de controlar



Invariable I_4

$X \in H$ cuya proyección a $Q(-P)$
es el generador canónico $Q(z)$

$$I_4(H) = \text{proyección}_{Q(-P)}(X - \bar{X})$$

Teorema (—, Gorkhami, Pearstein)

$$\text{Si } \underline{\text{Reg}(Z)} = \underline{\text{Reg}(W)} = 0$$

$$\text{y } m = m = 1$$

$$\langle Z, W \rangle_{\infty} = I_4(H)$$

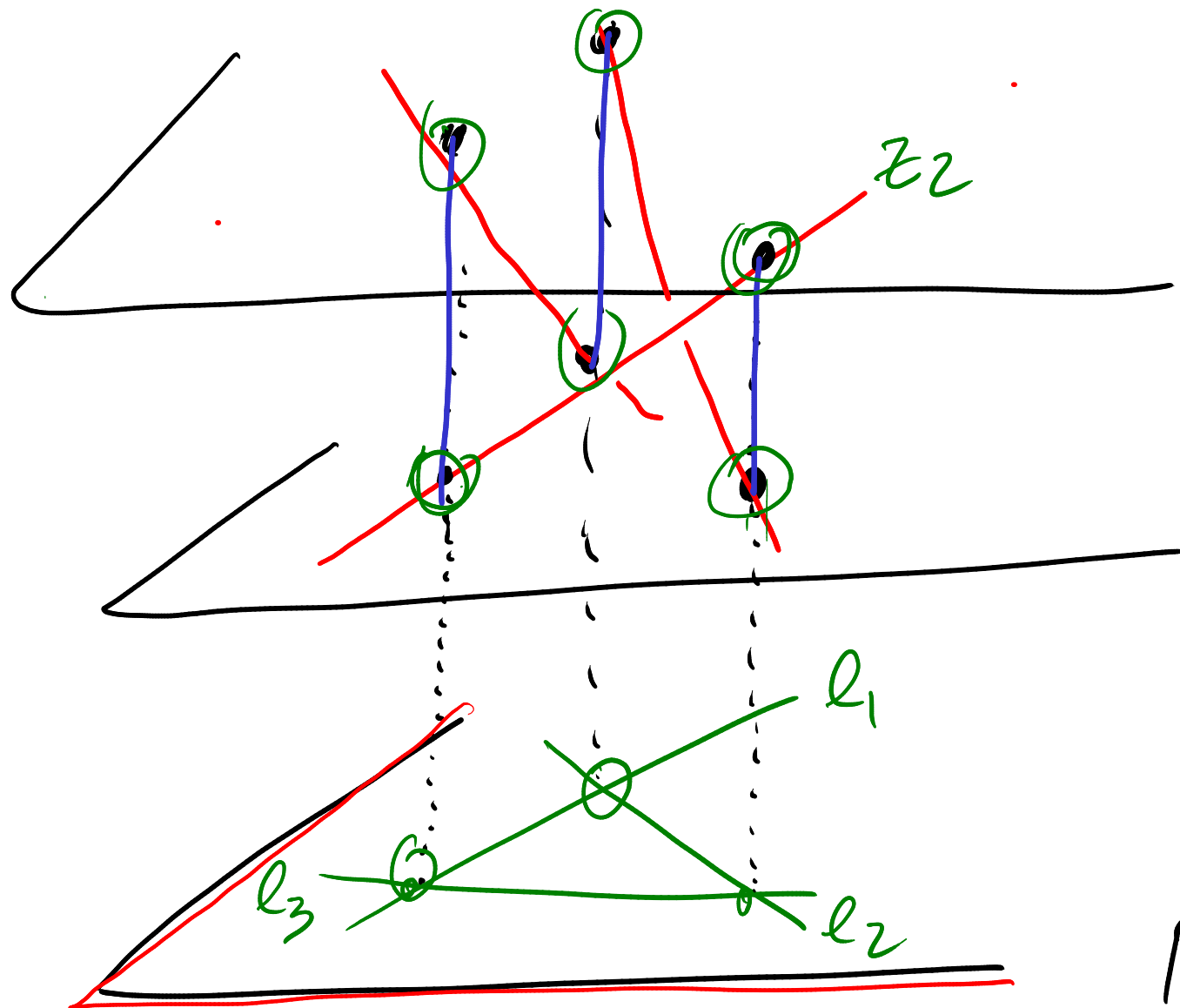
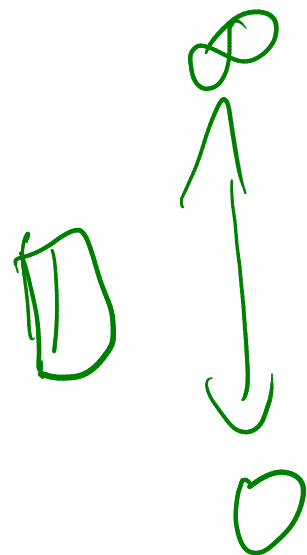
Example

$$X = \mathbb{P}^2$$

$$S_1, S_2, S_3 \in \Pi(X, \mathcal{O}(1)) \text{ indep}$$

$$l_i = \dim S_i \quad \underline{f_i} = \frac{S_{i+1}}{S_{i+2}} \quad P_i = l_{i+1} \wedge l_{i+2}$$

$$Z(S_1, S_2, S_3) \in Z^2(\mathbb{P}^2, \underline{1})_{00}$$



$\mathbb{P}^2 \times \frac{1}{2} \infty 5$

$\mathbb{P}^2 \times \frac{1}{2} 5$

$\mathbb{P}^2$

— negative — positive

En este caso:

$$\langle Z(s_1 s_2 s_3), Z(s'_1 s'_2 s'_3) \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_k D_2(\underline{a}_k)$$

Donde D_2 es la función di-logaritmo de Bloch-Whigner.