Principio local-global para espacios homogéneos sobre cuerpos globales geométricos de dimensión 2

(c/ Diego Izquierdo)

I) Caso clásico: cuerpos de números

K cuerpo de números, Ω = Lugares de K, $v \in \Omega \rightsquigarrow K_v$

X K-variedad $\rightsquigarrow X(\mathbb{A}_K)$ = puntos adélicos $\subseteq \prod_{\Omega} X(K_v)$

Principio local-global (PLG): $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset \Rightarrow X(K) \neq \emptyset$

Podemos explicar el fallo del PLG con la obstrucción de Brauer-Manin

$$\mathrm{Br}\, X := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m) \rightsquigarrow X(L) \times \mathrm{Br}\, X \longrightarrow \mathrm{Br}\, L$$
$$(P, \alpha) \longmapsto \alpha(P) := P^*\alpha$$

Dado $\alpha \in \mathrm{Br}\, X$:

Brauer
Hasse
Noether

$$\begin{tikzcd}
 & X(K) \arrow[r, hook] \arrow[d, "ev_\alpha"] & X(\mathbb{A}_K) \arrow[d, "ev_\alpha"'] \arrow[dr, "BM(\alpha,\cdot)"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}\, K \arrow[r] & \bigoplus \mathrm{Br}\, K_v \arrow[r, "\sum \mathrm{inv}_v"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$X(\mathbb{A}_K)^B := \{ (P_v) \in X(\mathbb{A}_K) \mid BM(\alpha, (P_v)) = 0 \ \forall \alpha \in B \}$$
$(B \subseteq \mathrm{Br}\, X)$

$$\rightsquigarrow X(K) \subseteq X(\mathbb{A}_K)^B \subseteq X(\mathbb{A}_K)$$

Si $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$, pero $X(\mathbb{A}_K)^B = \emptyset$, el PLG falla

G k-gp lineal conexo, X espacio homogéneo.

<u>Conj</u>: (Colliot-Thélène) $X(\mathbb{A}_k)^{Br X} \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$.

- OK si X esp. hom. <u>principal</u> (Sansuc '81)
- OK si X tiene estabilizadores <u>conexos</u> (Borovoi '96)

  Además, basta con usar clases "localmente constantes"

  $Б(X) := \{\alpha \in Br X \;/\; \alpha_v \in Im(Br K_v \to Br X_v) \;\forall v \in \Omega\} / Br K$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[dr] & X_v \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} K_v \end{tikzcd}$$

- Basta con probar la conj. para $G = SL_n$ y X con estab. finitos (Demarche-LA '19)
- OK para estab. finitos hipersolubles (Harpaz-Wittenberg '20)

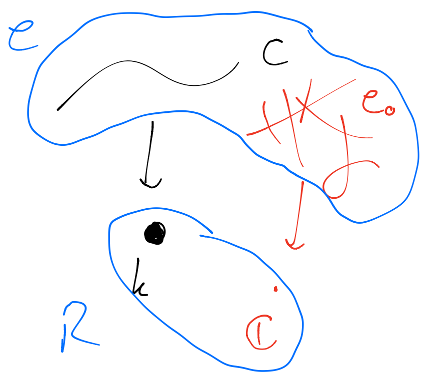
<u>II) Cuerpos globales geométricos</u>

<u>Caso bonito</u>: $k = \mathbb{C}((t))$ C/k curva suave, proy, geom. con.
$K = k(C)$.

2 tipos de valuaciones en K

- v trivial en k $\longleftrightarrow$ puntos cerrados de C/k $=: \Omega$
- v <u>no-trivial</u> en k $\longleftrightarrow$ ¿objeto geométrico?

Sea $R = \mathbb{C}[[t]]$, sea $\mathcal{C}/R$ un modelo de C/k.



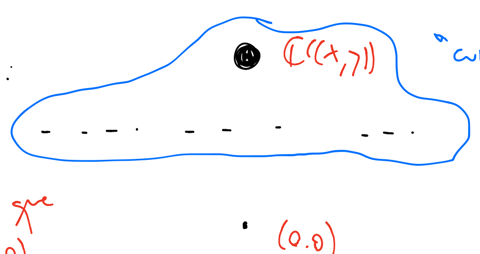
¡$\mathcal{C}$ puede ser singular!
⇝ desing. para obtener $\mathcal{C}_0$ un divisor SNC

Cada comp. irred de $\mathcal{C}_0$ es un divisor en $\mathcal{C}$ ⇝ valuación en K

$\Omega_0 = \{\text{valuaciones de } \mathcal{C}_0\} \cup \Omega$

Caso menos bonito, $K/\mathbb{C}((x,y))$ finita, $\mathbb{C}((x,y)) = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[[x,y]])$
$R/\mathbb{C}[[x,y]]$ clausura integral

Spec $\mathbb{C}[[x,y]]$:



curvas en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ que pasan por el (0,0)

Dibujo similar para R ⇝ "curva" que da valuaciones en K
⇝ Ω

⇝ fibra $\mathcal{C}_0 := \mathrm{Spec}\, R \times_{\mathbb{C}} (0,0)$
desing ⇝ comp. irred. ⇝ nuevas valuaciones en K
⇝ Ω_0.

Propiedades (para ambos casos)

- Brauer-Hasse-Noether:

$$0 \to \text{gp. div.} \to Br\, K \to \bigoplus_{\Omega} Br\, K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

También se tiene $0 \to Br\, K \to \bigoplus_{\Omega_0} Br\, K_v \to \bigoplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Obs: Tenemos obst de Brauer-Manin al P.L.G. con respecto a Ω

- Dualidad de Poitou-Tate: T toro, $\hat{T} = Hom_{\bar{K}}(\bar{T}, \mathbb{G}_m)$

$$Ш^i_0(K, A) := Ker\left(H^i(K,A) \to \prod_{\Omega_0} H^i(K_v, A)\right)$$

dualidad perfecta de gps finitos

$$Ш^1(K,T) \times \overline{Ш^2(K,\hat{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$Ш^1(K,\hat{T}) \times \overline{Ш^2(K,T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\left(\bar{A} := A/_{\text{subgp. div. maximal}}\right)$$

Obs: BHN $\rightsquigarrow$ $Ш^2(K,\mathbb{G}_m)$ puede ser $\neq 0$ ($\Rightarrow$ div), pero $Ш^2_0(K,\mathbb{G}_m) = 0$.

- NO hay análogo al Teorema de Chebotarev.

$Ш^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0 \rightsquigarrow Ш^2(K,\mathbb{Z}) \neq 0$

incluso $Ш^2_0(K,\mathbb{Z})$ puede ser $\neq 0$.

III PLG para espacios homogéneos (en este nuevo contexto).

- $\left\{\begin{array}{l}\text{Esp. hom. principales de } G\end{array}\right\} \longleftrightarrow H^1(K,G)$

  $\left\{\begin{array}{l}\text{" " " " "} \\ \text{con } K_v\text{-pts } \forall v\in\Omega\end{array}\right\} \longleftrightarrow Ш^1(K,G)$

- Si X EHP con G abeliano, $\mathcal{B}(X)\cong Ш^2(K,\hat{G})$

  $\rightsquigarrow$ Poitou-Tate corresponde a la obstrucción de BM respecto a $\mathcal{B}(X)$.

- Un poco más de trabajo $\Longrightarrow$ misma conclusión para G lineal conexo.

Teo: K un cuerpo como más arriba, G K-gp lineal conexo, X EHP de G. Entonces $X(\mathbb{A}_K)^{\mathcal{B}(X)}\neq\emptyset \Rightarrow X(K)\neq\emptyset$.
(Colliot-Thélène & Harari, Izquierdo)

Obs: Aquí, $\mathbb{A}_K$ es con respecto a Ω, no Ω_0.

¿Qué pasa si X tiene estab. conexos?

Teo: (Izquierdo - LA) Existen espacios homogéneos de SL_n con estab. tóricos tq:

1) $X(K) = \emptyset$
2) $X(\mathbb{A}_K)^{Br X} \neq \emptyset$ (c. resp. a Ω)
3) $X(K_v) \neq \emptyset \quad \forall v \in \Omega_0$.

Ingrediente clave: X EH de SL_n con estab. abeliano

Springer $\leadsto S$ una K-forma de un estabilizador

$\eta_X \in H^2(K,S)$ "clase de Springer"

$$X(L) \neq \emptyset \iff \eta_X|_L = 0 \in H^2(L,S)$$

Además, $B(X) \cong Ш^1(K,\hat{S})$

Receta:
- Encontrar un K-toro S y una clase $\alpha \neq 0 \in Ш^2_0(K,S)$.
- Como $Ш^2_0(K,S) \subseteq Ш^2(K,S)$, asegurarse de que α sea divisible en $Ш^2(K,S)$. ($\Rightarrow$ "PT no la ve" $\Rightarrow$ "BM no la ve")
- Construir un espacio homogéneo con clase de Springer α.

Obs: Tenemos obstrucciones más finas que explican el fallo del PLG para todo esp. hom. con estab. conexos.