Principio de funtorialidad de Langlands

Héctor del Castillo

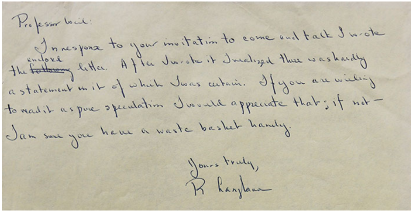
15 de octubre de 2020

Foto

Figura: Robert Langlands

Carta a André Weil

En una carta de 1973 dirigida a André Weil, Robert Langlands esbozó su gran visión de como conectar diferentes fenómenos en teoría de números clásica, dando comienzo a su programa.



Professor Weil:

In response to your invitation to come and talk I wrote the ~~following~~ enclosed letter. After I wrote it I realized there was hardly a statement in it of which I was certain. If you are willing to read it as pure speculation I would appreciate that; if not — I am sure you have a waste basket handy.

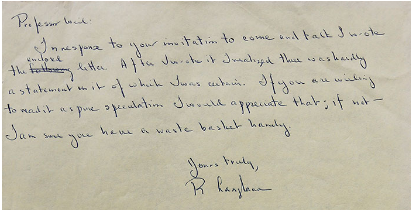
Yours truly,

R. Langlands

(a) Extracto de la carta

Carta a André Weil

En una carta de 1973 dirigida a André Weil, Robert Langlands esbozó su gran visión de como conectar diferentes fenómenos en teoría de números clásica, dando comienzo a su programa.


Professor Weil:
In response to your invitation to come and talk I wrote the ~~following~~ enclosed letter. After I wrote it I realized there was hardly a statement in it of which I was certain. If you are willing to read it as pure speculation I would appreciate that; if not — I am sure you have a waste basket handy.

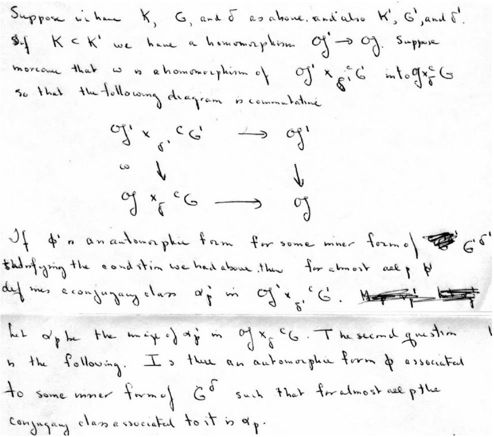
Yours truly,
R. Langlands

(a) Extracto de la carta

En el extracto se lee: «Si la lee como pura especulación, le estaré agradecido», escribió. «De lo contrario, estoy convencido de que tendrá una papelera a mano».

Funtorialidad

Langlands presenta su principio de funtorialidad.



Suppose we have K, G, and δ as above, and also K', G', and δ'. If $K \subset K'$ we have a homomorphism $\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$. Suppose moreover that ω is a homomorphism of $\mathfrak{g}' \times_{\delta'} {}^cG'$ into $\mathfrak{g} \times_{\delta} {}^cG$ so that the following diagram is commutative

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}' \times_{\delta'} {}^cG' \arrow[r] \arrow[d, "\omega"'] & \mathfrak{g}' \arrow[d] \\ \mathfrak{g} \times_{\delta} {}^cG \arrow[r] & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

If ϕ' is an automorphic form for some inner form of $G^{\delta'}$ satisfying the condition we had above, then for almost all p ϕ' defines a conjugacy class α'_p in $\mathfrak{g}' \times_{\delta'} {}^cG'$.

Let α_p be the image of α'_p in $\mathfrak{g} \times_{\delta} {}^cG$. The second question is the following. Is there an automorphic form ϕ associated to some inner form of G^{δ} such that for almost all p the conjugacy class associated to it is α_p.

Figura: Extracto

Sea F un cuerpo global y $\mathbb{A}_F$ su anillo de adèles. Sean $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ grupos reductivos sobre F. Consideramos un L-homomorfismo entre L-grupos

$$\rho\colon {}^L G \to {}^L H.$$

El principio afirma que dada una representación irreducible automorfa cuspidal π de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$, con clases semi-simples $\{\Phi_x\}$ de ${}^L G_x$ cuando π_x es no ramificada, existe un levantamiento (o transferencia) a una representación irreducible automorfa Π de $\mathbf{H}(\mathbb{A}_F)$, con clases-semisimple $\{\rho(\Phi_x)\}$ de ${}^L H_x$ cuando Π_x es no ramificada.

Contexto

Este principio ha sido estudiando por diferentes matemáticos en diferentes contextos. Nuestro punto de partida serán Cogdell, Kim, Piateski-Shapiro y Shahdidi, los cuales tratan el caso de representaciones **genéricas** en característica **cero** para grupos clásicos escindidos, unitarios y el grupo especial ortogonal par quasi-escindido. Después Lomelí logra extender estos resultado en característica **positiva**, excepto para el grupo especial ortogonal par quasi-escindido no escindido.

Trabajo de Tesis

En el contexto de doctorado en Valparaíso, mi trabajo de tesis consiste en probar dicha funtorialidad, en el caso que $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n}^{*}$ es un grupo especial ortogonal par no escindido quasi-escindido, $\mathbf{H} = \mathbf{GL}_n$ y ρ construida de estas elecciones, sobre un cuerpo de funciones F.

Trabajo de Tesis

En el contexto de doctorado en Valparaíso, mi trabajo de tesis consiste en probar dicha funtorialidad, en el caso que $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n}^{*}$ es un grupo especial ortogonal par no escindido quasi-escindido, $\mathbf{H} = \mathbf{GL}_n$ y ρ construida de estas elecciones, sobre un cuerpo de funciones F.

Figura: Vista del cerro Barón, Valparaíso

Sea π una representación genérica automorfa cuspidal de $\mathbf{SO}_{2n}^{*}(\mathbb{A}_F)$. Entonces, $\pi = \otimes_x' \pi_x$ se levanta (o se transfiere) a una representación automorfa irreducible $\Pi = T_\rho(\pi)$ de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$.

Sea π una representación genérica automorfa cuspidal de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$. Entonces, $\pi = \otimes'_x \pi_x$ se levanta (o se transfiere) a una representación automorfa irreducible $\Pi = T_\rho(\pi)$ de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$. Π puede ser expresada como una suma isobarica

$$\Pi = \Pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \Pi_d,$$

donde cada Π_i es una representación automorfa cuspidal unitaria y auto duales, tales que $\Pi_i \ncong \Pi_j$ para $i \neq j$

Sea π una representación genérica automorfa cuspidal de $\mathbf{SO}_{2n}^*(\mathbb{A}_F)$. Entonces, $\pi = \otimes_x' \pi_x$ se levanta (o se transfiere) a una representación automorfa irreducible $\Pi = T_\rho(\pi)$ de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$. Π puede ser expresada como una suma isobarica

$$\Pi = \Pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \Pi_d,$$

donde cada Π_i es una representación automorfa cuspidal unitaria y auto duales, tales que $\Pi_i \ncong \Pi_j$ para $i \neq j$. Más aún, si escribimos $\Pi = \otimes \Pi_x$, entonces para τ_x cada representación irreducible genérica de $\mathbf{GL}_m(F_x)$

$$\begin{gathered}
\gamma(s, \pi_x \times \tau_x, \psi_x) = \gamma(s, \Pi_x \times \tau_x, \psi_x) \\
L(s, \pi_x \times \tau_x) = L(s, \Pi_x \times \tau_x) \\
\varepsilon(s, \pi_x \times \tau_x, \psi_x) = \varepsilon(s, \Pi_x \times \tau_x, \psi_x),
\end{gathered}$$

donde el lado izquierdo usamos los factores de Langlands-Shahidi y los factores de Rankin-Selberg en la derecha.

Flashback

Algunos de los ingredientes básicos del formalismo de Robert Langlands son

Algunos de los ingredientes básicos del formalismo de Robert Langlands son

(Global). Los llamados **cuerpos globales**. Éstos son extensiones finitas F (separables) de $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{F}_q(T)$.

Cuerpos

Algunos de los ingredientes básicos del formalismo de Robert Langlands son

(Global). Los llamados **cuerpos globales**. Éstos son extensiones finitas F (separables) de $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{F}_q(T)$.

(Local). Los cuerpos localmente compactos que contiene a F (por ejemplo $F = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Otras posibilidades son los llamados **cuerpos no arquimedianos**. Así, obtenemos uns familia de cuerpos localmente compactos que contienen a F, denotados F_x e indexados por un conjunto $|F|$, llamado los lugares de F.

Adèles

- Al tener varias perspectivas en las cuales podemos ver nuestro cuerpos globales, parece natural buscar un objeto que considere todas esas posibilidades a la vez, pero que mantenga cierta regularidad topológica (compacidad local). Para eso se construye el anillo de los **adèles** $\mathbb{A}_F$.

Adèles

- Al tener varias perspectivas en las cuales podemos ver nuestro cuerpos globales, parece natural buscar un objeto que considere todas esas posibilidades a la vez, pero que mantenga cierta regularidad topológica (compacidad local). Para eso se construye el anillo de los **adèles** $\mathbb{A}_F$.
- Veamos este anillo para el caso $F = \mathbb{Q}$.

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{((x_p)_p, x_\infty) \in \prod_p \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R} \colon x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p\}.$$

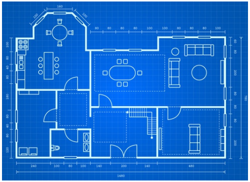
Observamos que contiene diagonalmente a $\mathbb{Q}$ y que la última condición nos permite asegurar que el anillo topológico $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ es localmente compacto.

Grupos algebraicos

Otro ingrediente básico son los **grupos reductivos** sobre un cuerpo global F. Estos objetos son esquemas de grupos, que a cada F-álgebra A asocian un grupo, llamado grupo de A-puntos. Un ejemplo central es el grupo reductivo $\mathbf{GL}_n/F$ asociado a las matrices invertibles de rango n.

Grupos algebraicos

Otro ingrediente básico son los **grupos reductivos** sobre un cuerpo global F. Estos objetos son esquemas de grupos, que a cada F-álgebra A asocian un grupo, llamado grupo de A-puntos. Un ejemplo central es el grupo reductivo $\mathbf{GL}_n/F$ asociado a las matrices invertibles de rango n.

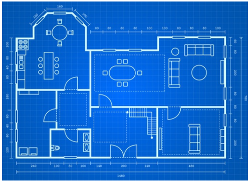


(a) Esquema

(b) Puntos

Grupos algebraicos

Otro ingrediente básico son los **grupos reductivos** sobre un cuerpo global F. Estos objetos son esquemas de grupos, que a cada F-álgebra A asocian un grupo, llamado grupo de A-puntos. Un ejemplo central es el grupo reductivo $\mathbf{GL}_n/F$ asociado a las matrices invertibles de rango n.



(a) Esquema

(b) Puntos

Estos esquemas son creados a partir de F-álgebra de tipo finito. Por ejemplo para GL_n/F, el esquema esta asociado al álgebra $F[\{T_{ij}\colon 1 \leq i,j \leq n\}, T]/(\det(T_{ij})T - 1)$.

Sea E una extensión cuadrática separable de F y $\mathrm{N}_{E/F}$ la norma

Sea E una extensión cuadrática separable de F y $\mathrm{N}_{E/F}$ la norma. Para $n \geq 1$ sea $Q_{E,n} = (F^{n-1} \oplus E \oplus F^{n-1}, q_{E,n})$ el espacio cuadrático, donde

$$q_{I,n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + \cdots + x_{n-1} x_{n+2} + \mathrm{N}_{E/F}(x).$$

Sea E una extensión cuadrática separable de F y $\mathrm{N}_{E/F}$ la norma. Para $n \geq 1$ sea $Q_{E,n} = (F^{n-1} \oplus E \oplus F^{n-1}, q_{E,n})$ el espacio cuadrático, donde

$$q_{l,n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + \cdots + x_{n-1} x_{n+2} + \mathrm{N}_{E/F}(x).$$

A partir del grupo ortogonal $\mathbf{O}(q)$, donde los puntos están dados por

$$R \mapsto \{g \in \mathrm{GL}(V_R) \colon q_{(E,n),R}(gx) = q_{(E,n),R}(x) \text{ for all } x \in V_R\},$$

Sea E una extensión cuadrática separable de F y $\mathrm{N}_{E/F}$ la norma. Para $n \geq 1$ sea $Q_{E,n} = (F^{n-1} \oplus E \oplus F^{n-1}, q_{E,n})$ el espacio cuadrático, donde

$$q_{l,n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + \cdots + x_{n-1} x_{n+2} + \mathrm{N}_{E/F}(x).$$

A partir del grupo ortogonal $\mathbf{O}(q)$, donde los puntos están dados por

$$R \mapsto \{g \in \mathrm{GL}(V_R) \colon q_{(E,n),R}(gx) = q_{(E,n),R}(x) \text{ for all } x \in V_R\},$$

podemos definir como subgroup, el grupo especial ortogonal par quasi-escindido no escindido

$$\mathbf{SO}^*_{2n} = \mathbf{SO}(q_{E,n}).$$

Automorfo

El actor principal del programa de Langlands son la formas **automorfas** de un grupo reductivo $\mathbf{G}/F$. Demos una descripción (impresionista) de dichas funciones:

Automorfo

El actor principal del programa de Langlands son la formas **automorfas** de un grupo reductivo $\mathbf{G}/F$. Demos una descripción (impresionista) de dichas funciones:

Figura: Claude Monet

El actor principal del programa de Langlands son la formas **automorfas** de un grupo reductivo $\mathbf{G}/F$. Demos una descripción (impresionista) de dichas funciones:

$$\varphi\colon\ \mathbf{G}(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C},$$

- Izquierda $\mathbf{G}(F)$-invariantes
- Suaves
- Admisible con respecto a ciertos operadores
- Admisible con respecto a cierto subgrupo compacto
- Condición de crecimiento

Figura: Claude Monet

Automorfo

El actor principal del programa de Langlands son la formas **automorfas** de un grupo reductivo $\mathbf{G}/F$. Demos una descripción (impresionista) de dichas funciones:

$$\varphi\colon\ \mathbf{G}(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C},$$

- Izquierda $\mathbf{G}(F)$-invariantes
- Suaves
- Admisible con respecto a ciertos operadores
- Admisible con respecto a cierto subgrupo compacto
- Condición de crecimiento

Figura: Claude Monet

¿Cómo abordar dichas condiciones y qué tipo de funciones son?

Ejemplos

Para $\mathbf{GL}_1/\mathbb{Q}$, podemos descomponer

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} = \mathbb{Q}^{\times} \times \prod_{p} \mathbb{Z}_p^{\times} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Ejemplos

Para $\mathbf{GL}_1 / \mathbb{Q}$, podemos descomponer

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} = \mathbb{Q}^{\times} \times \prod_p \mathbb{Z}_p^{\times} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Luego si escogemos un caracter $\chi\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ y $s \in \mathbb{C}$, entonces definimos

$$\varphi\colon q \cdot (x_p)_p \cdot x \mapsto \chi(x_p \bmod p) \cdot \exp(s \log x).$$

Ejemplos

Para $\mathbf{GL}_1/\mathbb{Q}$, podemos descomponer

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} = \mathbb{Q}^{\times} \times \prod_p \mathbb{Z}_p^{\times} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Luego si escogemos un caracter $\chi\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ y $s \in \mathbb{C}$, entonces definimos

$$\varphi\colon q \cdot (x_p)_p \cdot x \mapsto \chi(x_p \bmod p) \cdot \exp(s \log x).$$

Ésta será $\mathbb{Q}^{\times}$-invariante, suave y admisible por compactos, pues es invariante bajo $\prod_{q \neq p} \mathbb{Z}_q^{\times} \times \ker[\mathbb{Z}_p^{\times} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}]$. Cumple la condición admisibilidad pues $(D - s)(x^s) = 0$, donde $D = x(d/dx)$.

Ejemplos

Para $\mathbf{GL}_1/\mathbb{Q}$, podemos descomponer

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} = \mathbb{Q}^{\times} \times \prod_p \mathbb{Z}_p^{\times} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Luego si escogemos un caracter $\chi\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ y $s \in \mathbb{C}$, entonces definimos

$$\varphi\colon q \cdot (x_p)_p \cdot x \mapsto \chi(x_p \bmod p) \cdot \exp(s \log x).$$

Ésta será $\mathbb{Q}^{\times}$-invariante, suave y admisible por compactos, pues es invariante bajo $\prod_{q \neq p} \mathbb{Z}_q^{\times} \times \ker[\mathbb{Z}_p^{\times} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}]$. Cumple la condición admisibilidad pues $(D - s)(x^s) = 0$, donde $D = x(d/dx)$. Así, encontramos en el formalismo de formas automorfas ciertos aspectos de la teoría de grupos abelianos!

Para $\mathbf{GL}_2/\mathbb{Q}$, podemos descomponer (no de manera única esta vez)

$$g = \gamma \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot h$$

donde $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$, $x \in \mathbb{R}$, $y, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $h \in K_0(N)$, con $K_0(N)$ un cierto subgrupo cerrado de $\prod_p GL_2(\mathbb{Z}_p)$.

Para $\mathbf{GL}_2/\mathbb{Q}$, podemos descomponer (no de manera única esta vez)

$$g = \gamma \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot h$$

donde $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$, $x \in \mathbb{R}$, $y, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $h \in K_0(N)$, con $K_0(N)$ un cierto subgrupo cerrado de $\prod_p GL_2(\mathbb{Z}_p)$.

Debido a la condición de admisibilidad por compactos y la $GL_2(\mathbb{Q})$-invarianza, bastaría definir en los términos centrales.

Para $\mathbf{GL}_2/\mathbb{Q}$, podemos descomponer (no de manera única esta vez)

$$g = \gamma \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot h$$

donde $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$, $x \in \mathbb{R}$, $y, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $h \in K_0(N)$, con $K_0(N)$ un cierto subgrupo cerrado de $\prod_p GL_2(\mathbb{Z}_p)$.
Debido a la condición de admisibilidad por compactos y la $GL_2(\mathbb{Q})$-invarianza, bastaría definir en los términos centrales.
Más aún para que este bien definida es necesario que sea izquierda invariante por $GL_2^+(\mathbb{R})K_0(N) \cap GL_2(\mathbb{Q}) = \Gamma_0(N)$.

Para $\mathbf{GL}_2/\mathbb{Q}$, podemos descomponer (no de manera única esta vez)

$$g = \gamma \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot h$$

donde $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$, $x \in \mathbb{R}$, $y, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $h \in K_0(N)$, con $K_0(N)$ un cierto subgrupo cerrado de $\prod_p GL_2(\mathbb{Z}_p)$.

Debido a la condición de admisibilidad por compactos y la $GL_2(\mathbb{Q})$-invarianza, bastaría definir en los términos centrales.

Más aún para que este bien definida es necesario que sea izquierda invariante por $GL_2^+(\mathbb{R})K_0(N) \cap GL_2(\mathbb{Q}) = \Gamma_0(N)$.

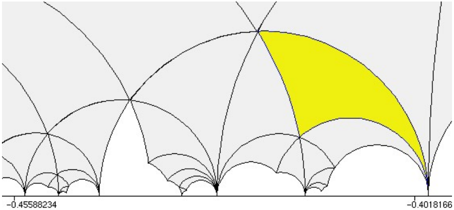


Figura: Dominio de $\Gamma_0(60)$

Ahora, si suponemos que es derecha invariante por $\mathbb{R}^{\times}SO(2)(\mathbb{R})$, la admisibilidad por operadores se traduce a una admisibilidad con respecto a

$$-y^2\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right).$$

Ahora, si suponemos que es derecha invariante por $\mathbb{R}^{\times}SO(2)(\mathbb{R})$, la admisibilidad por operadores se traduce a una admisibilidad con respecto a

$$-y^2\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right).$$

Luego, si esta función es una función propia de estos operadores, será admisible.

Ahora, si suponemos que es derecha invariante por $\mathbb{R}^{\times} SO(2)(\mathbb{R})$, la admisibilidad por operadores se traduce a una admisibilidad con respecto a

$$-y^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right).$$

Luego, si esta función es una función propia de estos operadores, será admisible.
Así, encontramos en el formalismo de formas automorfas cierto tipo de funciones que de hecho aparecen en el estudio espectral de $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$.

El espacio de formas automorfas es un espacio vectorial, en el cual existe un tipo de acción de $G(\mathbb{A}_F)$. Luego, podemos recolectar dichas funciones en **representaciones (automorfas)** admisible.

El espacio de formas automorfas es un espacio vectorial, en el cual existe un tipo de acción de $G(\mathbb{A}_F)$. Luego, podemos recolectar dichas funciones en **representaciones (automorfas)** admisible. Las irreducibles representaciones admisibles tienen una propiedad especial: Son factorizables en términos locales!

$$\Pi = \otimes' \Pi_x.$$

Operadores de Hecke y limpia

- Esto nos permite asociar cierta información numérica local a nuestras representaciones automorfas irreducible. De hecho para toda función $f_v \colon \mathbf{G}(F_v) \to \mathbb{C}$ bi-invariante por un subgrupo compacto máximo ultra especial K_v y viendo $\mathbf{G}(F_v) \hookrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$, en la coordenada v, podemos definir un operador T_{f_v} en el espacio de la representación.

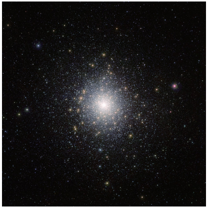
- Esto nos permite asociar cierta información numérica local a nuestras representaciones automorfas irreducible. De hecho para toda función $f_v : \mathbf{G}(F_v) \to \mathbb{C}$ bi-invariante por un subgrupo compacto máximo ultra especial K_v y viendo $\mathbf{G}(F_v) \hookrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$, en la coordenada v, podemos definir un operador T_{f_v} en el espacio de la representación.
- Un resultado central de la teoría es que estos operadores forman un álgebra llamada de **Hecke** esférica, conmutativa finitamente generada sobre $\mathbb{C}$ (isomorfismo de Satake). Así, para una representación irreducible de $\mathbf{G}(F_x)$ que tengo un vector fijo por K_v (i.e no ramificada), obtenemos un carácter de esta álgebra.

L-grupo

Este carácter tiene aspectos que no se ven a simple vista, pues nuestro cuerpo base F no lo revela y solo es observable extendiendo escalares (a una clausura algebraica).

Este carácter tiene aspectos que no se ven a simple vista, pues nuestro cuerpo base F no lo revela y solo es observable extendiendo escalares (a una clausura algebraica).

(a) Cuerpo Base



(b) Extendiendo

Así, Robert Langlands define los L-**grupos**, los cuales son un mezcla de información estructural de $\mathbf{G}$, codificada en un grupo de matrices y una acción del grupo de Galois de F_x o F, en dicho grupo.

$$^{L}G = \widehat{G}(\mathbb{C}) \rtimes \Gamma_{F_{(v)}}.$$

Así, Robert Langlands define los L-**grupos**, los cuales son un mezcla de información estructural de $\mathbf{G}$, codificada en un grupo de matrices y una acción del grupo de Galois de F_x o F, en dicho grupo.

$$^{L}G = \widehat{G}(\mathbb{C}) \rtimes \Gamma_{F_{(v)}}.$$

Es en este contexto que el carácter se traduce como cierta clase de conjugación semisimple Φ_x del L-grupo. Es esta información la primera piedra que permite hacer puentes!

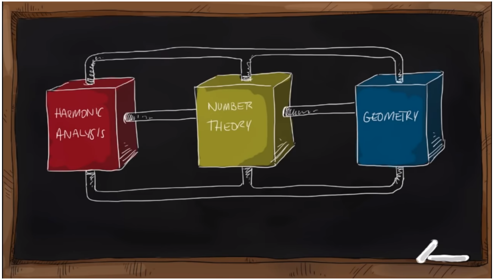


Figura: Youtube

Funtorialidad

Volvamos a nuestro caso: Sea F cuerpo de funciones con cuerpo de constantes $\mathbb{F}_q$ y E una extension cuadrática separable de F. Nuestro ρ, para $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2n}^* = \mathbf{SO}(q_{E,n})$ y $\mathbf{H} = \mathbf{GL}_{2n}$, esta dado por

Volvamos a nuestro caso: Sea F cuerpo de funciones con cuerpo de constantes $\mathbb{F}_q$ y E una extension cuadrática separable de F. Nuestro ρ, para $\mathbf{G} = \mathbf{SO}^*_{2n} = \mathbf{SO}(q_{E,n})$ y $\mathbf{H} = \mathbf{GL}_{2n}$, esta dado por

$$\rho : \mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C}) \rtimes \Gamma_F \to \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \times \Gamma_F.$$

$$(g,\tau) \mapsto \begin{cases} (gw,\tau) & \text{if } \tau \notin \Gamma_E \\ (g,\tau) & \text{if } \tau \in \Gamma_E \end{cases}$$

donde

$$w = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Sea $\pi = \otimes'_x \pi_x$ una representación automorfa cuspidal genérica de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$. ¿Como construiremos entonces el levantamiento $\Pi = \otimes'_x \Pi_x$?

Construcción

Sea $\pi = \otimes'_x \pi_x$ una representación automorfa cuspidal genérica de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$. ¿Como construiremos entonces el levantamiento $\Pi = \otimes'_x \Pi_x$?

- Para π_x no ramificada la clase semisimple $\rho(\Phi_x)$ nos da una representación Π'_x no ramificada de $\mathbf{GL}_{2n}(F_x)$ asociada, vía el isomorfismo de Satake.

Construcción

Sea $\pi = \otimes'_x \pi_x$ una representación automorfa cuspidal genérica de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$. ¿Como construiremos entonces el levantamiento $\Pi = \otimes'_x \Pi_x$?

- Para π_x no ramificada la clase semisimple $\rho(\Phi_x)$ nos da una representación Π'_x no ramificada de $\mathbf{GL}_{2n}(F_x)$ asociada, vía el isomorfismo de Satake.
- Partiremos viendo que tipo de condiciones se necesitan para una representación admisible (global) de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ sea automorfa. Tomaremos como inspiración el teorema recíproco clásico de Hecke

Construcción

Sea $\pi = \otimes'_x \pi_x$ una representación automorfa cuspidal genérica de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$. ¿Como construiremos entonces el levantamiento $\Pi = \otimes'_x \Pi_x$?

- Para π_x no ramificada la clase semisimple $\rho(\Phi_x)$ nos da una representación Π'_x no ramificada de $\mathbf{GL}_{2n}(F_x)$ asociada, vía el isomorfismo de Satake.
- Partiremos viendo que tipo de condiciones se necesitan para una representación admisible (global) de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ sea automorfa. Tomaremos como inspiración el teorema recíproco clásico de Hecke. Así estas condiciones están codificada en la información aritmética dada por factores globales y locales de Rankin-Selberg

$$L(s, \Pi \times \tau) \quad \& \quad \varepsilon(s, \Pi \times \tau, \psi).$$

Teorema del recíproco

Sea S un conjunto finito de lugares de $|F|$. Para cada entero m, sea

$$\mathcal{A}_0(m) = \{\tau \mid \tau \text{ una representación cuspidal de } \mathbf{GL}_m(\mathbb{A}_F)\},$$

y

$$\mathcal{A}_0^S(m) = \{\tau \in \mathcal{A}_0(m) \mid \tau_x \text{ es no ramificada para todo } x \in S\}.$$

Sea S un conjunto finito de lugares de $|F|$. Para cada entero m, sea

$$\mathcal{A}_0(m) = \{\tau \mid \tau \text{ una representación cuspidal de } \mathbf{GL}_m(\mathbb{A}_F)\},$$

y

$$\mathcal{A}_0^S(m) = \{\tau \in \mathcal{A}_0(m) \mid \tau_x \text{ es no ramificada para todo } x \in S\}.$$

Para $n \geq 2$, ponemos

$$\mathcal{T}(n-1) = \coprod_{m=1}^{n-1} \mathcal{A}_0(m) \quad \text{and} \quad \mathcal{T}^S(n-1) = \coprod_{m=1}^{n-1} \mathcal{A}_0^S(m).$$

Teorema del recíproco

Sea S un conjunto finito de lugares de $|F|$. Para cada entero m, sea

$$\mathcal{A}_0(m) = \{\tau \mid \tau \text{ una representación cuspidal de } \mathbf{GL}_m(\mathbb{A}_F)\},$$

y

$$\mathcal{A}_0^S(m) = \{\tau \in \mathcal{A}_0(m) \mid \tau_x \text{ es no ramificada para todo } x \in S\}.$$

Para $n \geq 2$, ponemos

$$\mathcal{T}(n-1) = \coprod_{m=1}^{n-1} \mathcal{A}_0(m) \quad \text{and} \quad \mathcal{T}^S(n-1) = \coprod_{m=1}^{n-1} \mathcal{A}_0^S(m).$$

Si η es un carácter de $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times$, también ponemos

$$\mathcal{T}(S;\eta) = \mathcal{T}^S(n-1) \otimes \eta = \{\tau = \tau' \otimes \eta \colon \tau' \in \mathcal{T}^S(n-1)\}.$$

Sea $n \geq 2$ un entero y $\Pi = \bigotimes_{x \in |F|} \Pi_x$ una representación irreducible admisible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$.

Sea $n \geq 2$ un entero y $\Pi = \bigotimes_{x \in |F|} \Pi_x$ una representación irreducible admisible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$.
Supongamos que Π que verifica las siguiente propiedades

Sea $n \geq 2$ un entero y $\Pi = \bigotimes_{x \in |F|} \Pi_x$ una representación irreducible admisible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$.

Supongamos que Π que verifica las siguiente propiedades

1. El carácter central $\chi_\Pi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_{\Pi_x}$ de Π es invariante por el subgrupo $F^\times$ de $\mathbb{A}_F^\times$.

Sea $n \geq 2$ un entero y $\Pi = \bigotimes_{x\in|F|} \Pi_x$ una representación irreducible admisible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$.
Supongamos que Π que verifica las siguiente propiedades

1. El carácter central $\chi_\Pi = \bigotimes_{x\in|F|} \chi_{\Pi_x}$ de Π es invariante por el subgrupo $F^\times$ de $\mathbb{A}_F^\times$.
2. Para toda $\tau \in \mathcal{T}(S;\eta)$, las series formales (con variable q^{-s})

$$L(s, \Pi \times \tau) \text{ and } L(s, \tilde{\Pi} \times \tilde{\tau})$$

son polinomios y satisfacen la ecuación funcional

$$L(s, \Pi \times \tau) = \varepsilon(s, \Pi \times \tau, \psi) L(1-s, \tilde{\Pi} \times \tilde{\tau}).$$

Sea $n \geq 2$ un entero y $\Pi = \bigotimes_{x\in|F|} \Pi_x$ una representación irreducible admisible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$.
Supongamos que Π que verifica las siguiente propiedades

1. El carácter central $\chi_\Pi = \bigotimes_{x\in|F|} \chi_{\Pi_x}$ de Π es invariante por el subgrupo $F^\times$ de $\mathbb{A}_F^\times$.
2. Para toda $\tau \in \mathcal{T}(S;\eta)$, las series formales (con variable q^{-s})

   $$L(s, \Pi \times \tau) \text{ and } L(s, \tilde{\Pi} \times \tilde{\tau})$$

   son polinomios y satisfacen la ecuación funcional

   $$L(s, \Pi \times \tau) = \varepsilon(s, \Pi \times \tau, \psi) L(1 - s, \tilde{\Pi} \times \tilde{\tau}).$$

Entonces existe una representación automorfa irreducible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, donde para cada lugar $x \notin S$ tal que Π_x es no ramificada, es no ramificada y su clase semi-simple corresponde a la de Π_x.

Método de Langlands-Shahidi

- Considerando el teorema anterior, necesitamos completar la información no ramificada de tal manera que sus factores de Rankin-Selberg satisfagan las condiciones del teorema del recíproco.

Método de Langlands-Shahidi

- Considerando el teorema anterior, necesitamos completar la información no ramificada de tal manera que sus factores de Rankin-Selberg satisfagan las condiciones del teorema del recíproco.
- Es aquí donde aparece el método de Langlands-Shahidi

Método de Langlands-Shahidi

- Considerando el teorema anterior, necesitamos completar la información no ramificada de tal manera que sus factores de Rankin-Selberg satisfagan las condiciones del teorema del recíproco.
- Es aquí donde aparece el método de Langlands-Shahidi. El cual nos da para π_x una representación genérica de $\mathbf{SO}_{2n}^*(F_x)$ y τ_x una representación genérica de $\mathbf{GL}_m(F_x)$, los factores de Langlands-Sahidi los cuales son funciones racionales en $\mathbb{C}(q^{-s})$

$$\gamma(s, \pi_x \times \tau_x, \psi_x), \quad L(s, \pi_x \times \tau_x, \psi_x) \quad \& \quad \varepsilon(s, \pi_x \times \tau_x, \psi_x).$$

  Ellas cumplen varias propiedades, como la multiplicatividad, estabilidad, compatibilidad con los factores de Tate, etc. Nos encontraremos alguna de ellas en lo que sigue.

- Ahora si $\pi = \otimes'_x \pi_x$ es una representación genérica automorfa cuspidal de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$ y $\tau = \otimes'_x \tau_x$ una representación automorfa cuspidal de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{A}_F)$. Podemos formar el producto (euleriano) de estos factores.

$$L(s, \pi \times \tau) \quad \& \quad \varepsilon(s, \pi \times \tau, \psi).$$

- Ahora si $\pi = \otimes'_x \pi_x$ es una representación genérica automorfa cuspidal de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$ y $\tau = \otimes'_x \tau_x$ una representación automorfa cuspidal de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{A}_F)$. Podemos formar el producto (euleriano) de estos factores.

$$L(s, \pi \times \tau) \quad \& \quad \varepsilon(s, \pi \times \tau, \psi).$$

- Estos factores satisfacen propiedades que nos gustaría tener en nuestro candidato a levantamiento: la propiedad polinomial después de un twist y la ecuación funcional.

Levantamiento

Tenemos maneras de obtener información aritméticas con buena propiedades, como en la hipótesis del teorema del recíproco, a partir de una representación automorfa genérica cuspidal $\pi = \otimes_x' \pi_x$ de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{A}_F)$.

Levantamiento

Tenemos maneras de obtener información aritméticas con buena propiedades, como en la hipótesis del teorema del recíproco, a partir de una representación automorfa genérica cuspidal $\pi = \otimes'_x \pi_x$ de $\mathbf{GL}_m(\mathbb{A}_F)$. Ahora nos falta encontrar una representación irreducible admisible Π' de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ que complete la información no ramificada y sea compatible con las construcción de Langlands-Shahidi i.e.

$$L(s, \pi \times (\tau \otimes \eta)) = L(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta))$$
$$\varepsilon(s, \pi \times (\tau \otimes \eta), \psi) = \varepsilon(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \psi)$$

- Se comienza con una construcción preliminar, la que busca a partir de un carácter $\chi\colon \mathbf{SO}_2^*(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ encontrar una representación candidata irreducible admisible de $\mathbf{GL}_2(F_x)$,

$$\Pi'_x.$$

Esto lo logramos usando correspondencia de Langlands local para toros y $\mathbf{GL}_2$.

- Se comienza con una construcción preliminar, la que busca a partir de un carácter $\chi\colon \mathbf{SO}_2^*(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ encontrar una representación candidata irreducible admisible de $\mathbf{GL}_2(F_x)$,

$$\Pi'_x.$$

  Esto lo logramos usando correspondencia de Langlands local para toros y $\mathbf{GL}_2$.

- La estabilidad de los factores de Langlands-Shahidi, nos dice que si $\pi_{1,x}$ y $\pi_{2,x}$ son representaciones genérica (locales) de $\mathbf{SO}_{2n}^*(F_x)$, con el mismo carácter central, y τ_x de $\mathbf{GL}_m(F_x)$, entonces para todo carácter η_x de $F_x^\times$ suficientemente ramificado tenemos que

$$\gamma(s, \pi_{1,x} \times (\tau_x \otimes \eta), \psi_x) = \gamma(s, \pi_{2,x} \times (\tau_x \otimes \eta_x), \psi_x).$$

- La estabilidad nos simplifica la búsqueda al caso de series principales. Es en este caso que podemos calcular los factores de Langland-Shahidi usando la multiplicatividad

- La estabilidad nos simplifica la búsqueda al caso de series principales. Es en este caso que podemos calcular los factores de Langland-Shahidi usando la multiplicatividad: Si π_x es el subcociente genérico de

$$i_{P_0}^{SO_{2n}^*}(\chi_{n-1}, \ldots, \chi_1, \chi_0),$$

donde χ_i son caracteres de $F_x^\times$ para $1 \leq i \leq n-1$, χ_0 carácter de $\mathbf{SO}_2^*(F_x)$ y ξ un carácter de $F_x^\times$. Entonces tenemos la siguiente formula

$$\gamma(s, \pi_x \times \xi, \psi) = \gamma(s, \chi_0 \times \xi, \psi) \prod_{i=1}^{n-1} \gamma(s, \chi_i \xi, \psi) \gamma(s, \chi_i^{-1} \xi, \psi),$$

- La estabilidad nos simplifica la búsqueda al caso de series principales. Es en este caso que podemos calcular los factores de Langland-Shahidi usando la multiplicatividad: Si π_x es el subcociente genérico de

$$i_{P_0}^{SO_{2n}^*}(\chi_{n-1}, \dots, \chi_1, \chi_0),$$

  donde χ_i son caracteres de $F_x^\times$ para $1 \leq i \leq n-1$, χ_0 carácter de $\mathbf{SO}_2^*(F_x)$ y ξ un carácter de $F_x^\times$. Entonces tenemos la siguiente formula

$$\gamma(s, \pi_x \times \xi, \psi) = \gamma(s, \chi_0 \times \xi, \psi) \prod_{i=1}^{n-1} \gamma(s, \chi_i \xi, \psi) \gamma(s, \chi_i^{-1} \xi, \psi),$$

- A partir de la construcción preliminar y esta formula se construye la candidata Π_x' de $\mathbf{GL}_{2n}(F_x)$ que cumple la relación deseada.

Finalmente usando que los factores de Langlands-Shahidi satisface la condición polinomial (después de un twist), ecuación funcional y la compatibilidad que enunciamos, el teorema del recíproco nos permite encontrar un levantamiento de π a $\mathbf{GL}_{2n}$

$$\Pi = \otimes'_x \Pi_x,$$

tal que es no ramificado para los lugares donde π lo es. Más aún sus clases semi-simple corresponden a $\rho(\Phi_x)$.

Imagen

La teoría general de formas automorfas de $\mathbf{GL}_{2n}$, nos dice que toda representación automorfa irreducible Π de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ se puede encontrar como un subcociente de una representación inducida de representaciones cuspidales de $\mathbf{GL}_{n_i}$,

$$\mathrm{Ind}(\Pi_1, \cdots, \Pi_d).$$

Imagen

La teoría general de formas automorfas de $\mathbf{GL}_{2n}$, nos dice que toda representación automorfa irreducible Π de $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ se puede encontrar como un subcociente de una representación inducida de representaciones cuspidales de $\mathbf{GL}_{n_i}$,

$$\mathrm{Ind}(\Pi_1, \cdots, \Pi_d).$$

Es estudiando estas representaciones cuspidales que obtenemos el resultado de sumas isobaricas, unitaridad de las Π_i, etc. En nuestro caso, lo hacemos mediante un estudio de funciones L-parciales, en el cual usamos el método de Langlands-Shahidi y el resultado de L. Lafforgue sobre la conjetura de Ramanujan para el caso $\mathbf{GL}_r$ en característica positiva.

Fuerte

La version expuesta al comienzo es una aproximación de lo que se espera en general. Es por eso que generalmente es llamado levantamiento débil

Fuerte

La version expuesta al comienzo es una aproximación de lo que se espera en general. Es por eso que generalmente es llamado levantamiento débil. La version fuerte de esta conjetura también pide una compatibilidad entre la información aritmética, i.e los factores

$$\gamma(s, \pi_x \times \tau_x, \psi_x) = \gamma(s, \Pi_x \times \tau_x, \psi_x)$$
$$L(s, \pi_x \times \tau_x) = L(s, \Pi_x \times \tau_x)$$
$$\varepsilon(s, \pi_x \times \tau_x, \psi_x) = \varepsilon(s, \Pi_x \times \tau_x, \psi_x).$$

Usando esta version de funtorilidad fuerte y el resultado L. Lafforgue para $\mathbf{GL}_r$ sobre la conjetura de Ramanujan, obtenemos que

Sea π una representación automorfa cuspidal genérica de $\mathbf{SO}^*_{2n}(\mathbb{A}_F)$. Entonces toda π_x es templada. En particular, si π_x es no ramificada, sus parámetros de Satake tiene valor absoluto 1.

Gracias!