

## SEMINARIO LATINOAMERICANO DE TEORÍA DE NÚMEROS

# TIPOS DE REDUCCIÓN DE CURVAS DE GÉNERO 3 EN UN STRATA ESPECIAL DE SU ESPACIO DE MODULI

(en colaboración con I. Bouw, N. Coppola, P. Kılıçer, S. Kunzweiler y A. Somoza)

Elisa Lorenzo García  
Université de Rennes 1 (Francia)

10 de septiembre de 2020

## MOTIVACIÓN

Sea  $E$  una curva elíptica definida sobre un cuerpo de números  $K$  y  $p$  un primo. Supongamos  $E$  dada por una ecuación de la forma

$$y^2 = f(x) = x^3 + ax + b = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

con  $a, b \in \mathcal{O}_K$  y  $e_i \in \bar{K}$ :

# MOTIVACIÓN

Sea  $E$  una curva elíptica definida sobre un cuerpo de números  $K$  y  $\mathfrak{p}$  un primo. Supongamos  $E$  dada por una ecuación de la forma

$$y^2 = f(x) = x^3 + ax + b = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

con  $a, b \in \mathcal{O}_K$  y  $e_i \in \bar{K}$ :

## Teorema (Tate'75)

- ▶  $E$  tiene buena reducción si y sólo si  $\mathfrak{p} \nmid \Delta(E)$
- ▶  $E$  tiene mala reducción aditiva si y sólo si  $\mathfrak{p} \mid \Delta(E)$  y  $\mathfrak{p} \nmid a$ .
- ▶  $E$  tiene mala reducción multiplicativa si y sólo si  $\mathfrak{p} \mid \Delta(E)$  y  $\mathfrak{p} \mid a$ .

# MOTIVACIÓN

Sea  $E$  una curva elíptica definida sobre un cuerpo de números  $K$  y  $\mathfrak{p}$  un primo. Supongamos  $E$  dada por una ecuación de la forma

$$y^2 = f(x) = x^3 + ax + b = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

con  $a, b \in \mathcal{O}_K$  y  $e_i \in \bar{K}$ :

## Teorema (Tate'75)

- ▶  $E$  tiene buena reducción si y sólo si  $\mathfrak{p} \nmid \Delta(E)$
- ▶  $E$  tiene mala reducción aditiva si y sólo si  $\mathfrak{p} \mid \Delta(E)$  y  $\mathfrak{p} \nmid a$ .
- ▶  $E$  tiene mala reducción multiplicativa si y sólo si  $\mathfrak{p} \mid \Delta(E)$  y  $\mathfrak{p} \mid a$ .

Hay mala reducción si y sólo si dos de las raíces de  $f$  coinciden modulo  $\mathfrak{p}$ : recuerden que  $\Delta(E) = (e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$  y  $a = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1$ .

# MOTIVACIÓN

Sea  $E$  una curva elíptica definida sobre un cuerpo de números  $K$  y  $\mathfrak{p}$  un primo. Supongamos  $E$  dada por una ecuación de la forma

$$y^2 = f(x) = x^3 + ax + b = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

con  $a, b \in \mathcal{O}_K$  y  $e_i \in \bar{K}$ :

## Teorema (Tate'75)

- ▶  $E$  tiene buena reducción si y sólo si  $\mathfrak{p} \nmid \Delta(E)$
- ▶  $E$  tiene mala reducción aditiva si y sólo si  $\mathfrak{p} \mid \Delta(E)$  y  $\mathfrak{p} \nmid a$ .
- ▶  $E$  tiene mala reducción multiplicativa si y sólo si  $\mathfrak{p} \mid \Delta(E)$  y  $\mathfrak{p} \mid a$ .

Hay mala reducción si y sólo si dos de las raíces de  $f$  coinciden modulo  $\mathfrak{p}$ : recuerden que  $\Delta(E) = (e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$  y  $a = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1$ .

$E$  tiene potencialmente buena reducción si y sólo si  $v(\Delta) \leq 3v(a)$ .

## MOTIVACIÓN

Sea  $C : y^2 = f(x) = \prod_{i=1}^6 (x - a_i)$  una curva de género 2. Las clases de isomorfismo de curvas de género 2 están determinadas por los invariantes de Igusa:  $I_2, I_4, I_6$  e  $I_{10} = \Delta(C)$ .

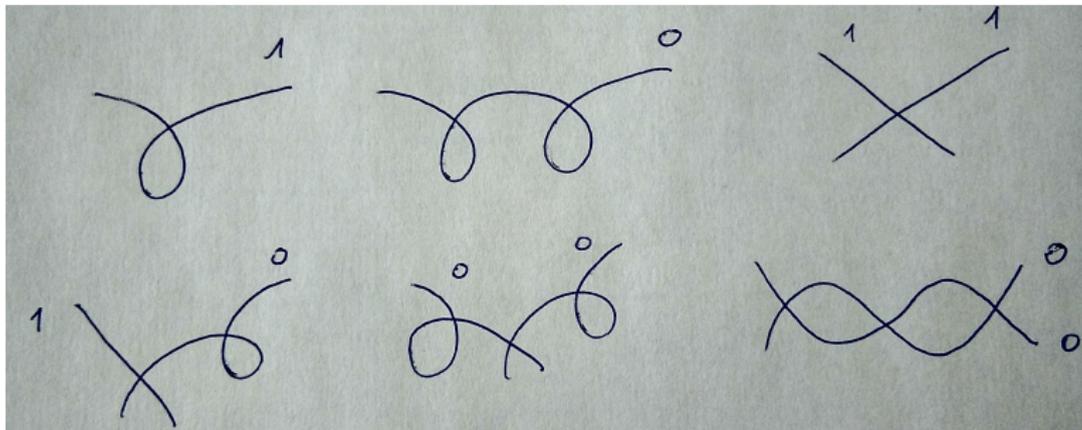
# MOTIVACIÓN

Sea  $C : y^2 = f(x) = \prod_{i=1}^6 (x - a_i)$  una curva de género 2. Las clases de isomorfismo de curvas de género 2 están determinadas por los invariantes de Igusa:  $I_2, I_4, I_6$  e  $I_{10} = \Delta(C)$ .

## Teorema (Liu'93)

- ▶  $C$  tiene buena reducción si y sólo si  $\mathfrak{p} \nmid \Delta(C)$
- ▶  $C$  tiene potencialmente buena reducción si y sólo si  $iv(I_{10}) \leq 5v(I_{2i})$ .
- ▶ Si  $C$  tiene geoméricamente mala reducción ésta es de uno de los tipos siguientes: ... y cada tipo está determinado por unos valores concretos de las valuaciones de los invariantes de la curva.

# MOTIVACIÓN



## MOTIVACIÓN

La prueba de Liu es "a la mano", pero la idea general para estudiar el tipo de reducción de curvas hiperelípticas es mirar como colisionan los puntos de ramificación módulo  $p$  (**cluster picture**).

## MOTIVACIÓN

La prueba de Liu es "a la mano", pero la idea general para estudiar el tipo de reducción de curvas hiperelíticas es mirar como colisionan los puntos de ramificación módulo  $p$  (**cluster picture**). Esta idea ha sido formalizada por Céline Maistret en sus tesis y en sus artículos con los hermanos Dokchitser y A. Morgan.

## MOTIVACIÓN

La prueba de Liu es "a la mano", pero la idea general para estudiar el tipo de reducción de curvas hiperelípticas es mirar como colisionan los puntos de ramificación módulo  $p$  (**cluster picture**). Esta idea ha sido formalizada por Céline Maistret en sus tesis y en sus artículos con los hermanos Dokchitser y A. Morgan. El siguiente paso es describir el tipo de cluster picture en términos de los invariantes. Mi alumno de tesis H. Favereau está utilizando esta estrategia para calcular los tipos de reducción de curvas **hiperelípticas** de género 3.

# MOTIVACIÓN

La prueba de Liu es "a la mano", pero la idea general para estudiar el tipo de reducción de curvas hiperelípticas es mirar como colisionan los puntos de ramificación módulo  $p$  (**cluster picture**). Esta idea ha sido formalizada por Céline Maistret en sus tesis y en sus artículos con los hermanos Dokchitser y A. Morgan. El siguiente paso es describir el tipo de cluster picture en

terminos de los invariantes. Mi alumno de tesis H. Favereau está utilizando esta estrategia para calcular los tipos de reducción de curvas **hiperelípticas** de género 3. Además esta idea se generaliza en los artículos de Irene Bouw y

S. Wewers a curvas superelípticas, i.e., de la forma:

$$y^\ell = f(x) = (x - a_1)^{e_1} \dots (x - a_r)^{e_r}.$$

# MOTIVACIÓN

La prueba de Liu es "a la mano", pero la idea general para estudiar el tipo de reducción de curvas hiperelípticas es mirar como colisionan los puntos de ramificación módulo  $p$  (**cluster picture**). Esta idea ha sido formalizada por Céline Maistret en sus tesis y en sus artículos con los hermanos Dokchitser y A. Morgan. El siguiente paso es describir el tipo de cluster picture en

terminos de los invariantes. Mi alumno de tesis H. Favereau está utilizando esta estrategia para calcular los tipos de reducción de curvas **hiperelípticas** de género 3. Además esta idea se generaliza en los artículos de Irene Bouw y

S. Wewers a curvas superelípticas, i.e., de la forma:

$$y^\ell = f(x) = (x - a_1)^{e_1} \dots (x - a_r)^{e_r}.$$

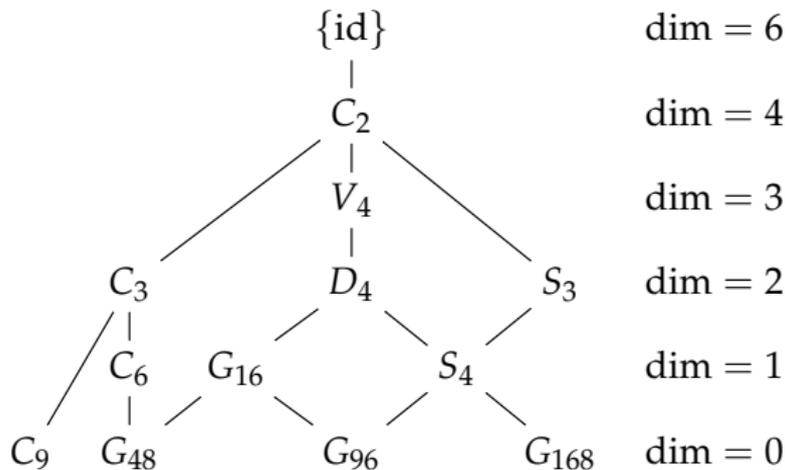
La idea: es simple utilizar un morfismo (de Galois)  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  y estudiar la reducción de los puntos de ramificación.

## CURVAS DE GÉNERO 3

El espacio de moduli de curvas de género 3 tiene dimensión 6. Las curvas de género 3 pueden ser **hiperelípticas** o **no hiperelípticas**. El locus de curvas hiperelípticas tiene dimensión 5 y ya hemos hablado de como se puede calcular su tipo de reducción.

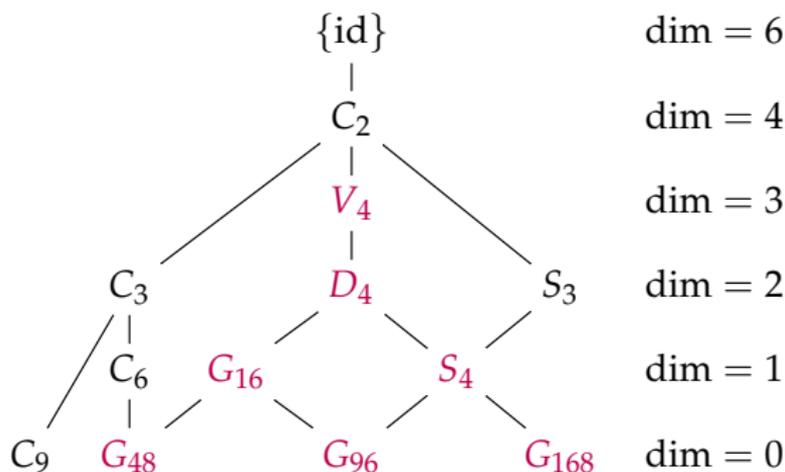
## CURVAS DE GÉNERO 3

El espacio de moduli de curvas de género 3 tiene dimensión 6. Las curvas de género 3 pueden ser **hiperelípticas** o **no hiperelípticas**. El locus de curvas hiperelípticas tiene dimensión 5 y ya hemos hablado de como se puede calcular su tipo de reducción. Las curvas no hiperelípticas de género 3 son cuárticas planas y aquellas con automorfismos no triviales están clasificadas como sigue:



## CURVAS DE GÉNERO 3

El espacio de moduli de curvas de género 3 tiene dimensión 6. Las curvas de género 3 pueden ser **hiperelípticas** o **no hiperelípticas**. El locus de curvas hiperelípticas tiene dimensión 5 y ya hemos hablado de como se puede calcular su tipo de reducción. Las curvas no hiperelípticas de género 3 son cuárticas planas y aquellas con automorfismos no triviales están clasificadas como sigue:



## CUÁRTICAS DE CIANI

Una cuártica plana  $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$  conteniendo el grupo de Klein en su grupo de automorfismos puede siempre escribirse de la forma siguiente (a lo mejor extendiendo el cuerpo de definición):

$$Y : Ax^4 + By^4 + Cz^4 + ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = 0.$$

## CUÁRTICAS DE CIANI

Una cuártica plana  $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$  conteniendo el grupo de Klein en su grupo de automorfismos puede siempre escribirse de la forma siguiente (a lo mejor extendiendo el cuerpo de definición):

$$Y: \quad Ax^4 + By^4 + Cz^4 + ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = 0.$$

Los elementos de  $V_4$  actúan en  $Y$  como

$$(x : y : z) \mapsto (\pm x : \pm y : z),$$

y el morfismo de curvas  $f : Y \rightarrow X = Y/V_4$  es de Galois y ramifica en un conjunto  $D$  de 6 puntos. Además  $X \simeq \mathbb{P}^1$ .

# CUÁRTICAS DE CIANI

Una cuártica plana  $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$  conteniendo el grupo de Klein en su grupo de automorfismos puede siempre escribirse de la forma siguiente (a lo mejor extendiendo el cuerpo de definición):

$$Y: \quad Ax^4 + By^4 + Cz^4 + ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = 0.$$

Los elementos de  $V_4$  actúan en  $Y$  como

$$(x : y : z) \mapsto (\pm x : \pm y : z),$$

y el morfismo de curvas  $f : Y \rightarrow X = Y/V_4$  es de Galois y ramifica en un conjunto  $D$  de 6 puntos. Además  $X \simeq \mathbb{P}^1$ .

## Teorema

El anillo de invariantes de  $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$  está generado por los invariantes siguientes:

$$I_3 = ABC, \quad I'_3 = A\Delta_a + B\Delta_b + C\Delta_c, \\ I''_3 = -4ABC + Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - abc, \quad I_6 = \Delta_a\Delta_b\Delta_c,$$

con  $\Delta_a = a^2 - 4BC$ ,  $\Delta_b = b^2 - 4AC$  y  $\Delta_c = c^2 - 4AB$ .

## RECUBRIMIENTOS ADMISIBLES

Una curva tiene reducción **semi-estable** si tiene un modelo cuya fibra especial es reducida y tiene como mucho puntos dobles como singularidades.

## RECUBRIMIENTOS ADMISIBLES

Una curva tiene reducción **semi-estable** si tiene un modelo cuya fibra especial es reducida y tiene como mucho puntos dobles como singularidades.

El Teorema de Reducción Estable de Deligne-Mumord afirma que toda curva de género mayor o igual a 2 tiene un modelo semi-estable (quizás sobre una extensión finita del cuerpo de definición). Además existe un modelo semi-estable minimal: el modelo **estable**, que se caracteriza por que toda componente irreducible de género 0 de la fibra especial interseca al resto de la reducción en al menos 3 puntos.

## RECUBRIMIENTOS ADMISIBLES

Una curva tiene reducción **semi-estable** si tiene un modelo cuya fibra especial es reducida y tiene como mucho puntos dobles como singularidades.

El Teorema de Reducción Estable de Deligne-Mumord afirma que toda curva de género mayor o igual a 2 tiene un modelo semi-estable (quizás sobre una extensión finita del cuerpo de definición). Además existe un modelo semi-estable minimal: el modelo **estable**, que se caracteriza por que toda componente irreducible de género 0 de la fibra especial interseca al resto de la reducción en al menos 3 puntos.

Un **recubrimiento admisible** es "la reducción de un morfismo liso de modelos semi-estables" + una condición técnica en los grupos de inercia.

## RECUBRIMIENTOS ADMISIBLES

Una curva tiene reducción **semi-estable** si tiene un modelo cuya fibra especial es reducida y tiene como mucho puntos dobles como singularidades.

El Teorema de Reducción Estable de Deligne-Mumord afirma que toda curva de género mayor o igual a 2 tiene un modelo semi-estable (quizás sobre una extensión finita del cuerpo de definición). Además existe un modelo semi-estable minimal: el modelo **estable**, que se caracteriza por que toda componente irreducible de género 0 de la fibra especial interseca al resto de la reducción en al menos 3 puntos.

Un **recubrimiento admisible** es "la reducción de un morfismo liso de modelos semi-estables" + una condición técnica en los grupos de inercia.

### Teorema

Hay 17 posibilidades para la reducción estable de  $(X, D)$ .

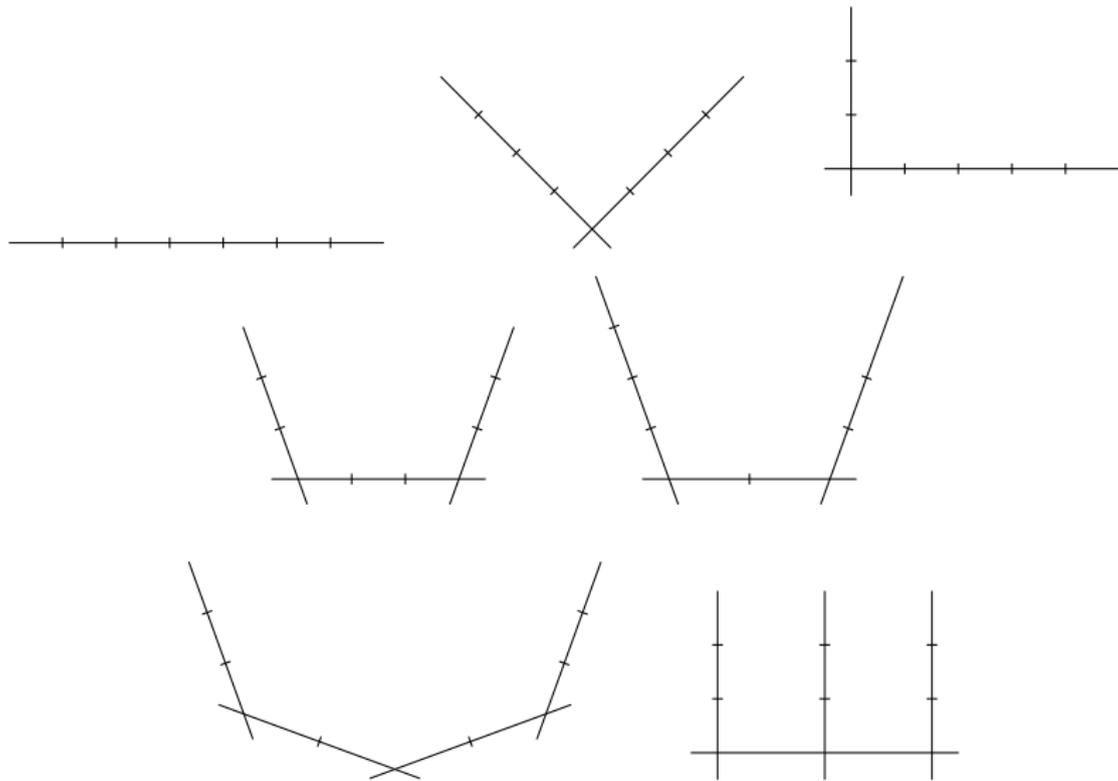
# REDUCCIONES POSIBLES DE $\Upsilon \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

Posibilidades grafos de  $\bar{X}$



# REDUCCIONES POSIBLES DE $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

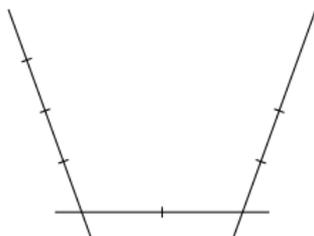
Posibilidades grafos de  $\bar{X}$



# REDUCCIONES POSIBLES DE $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

Etiquetados posibles para los 6 puntos

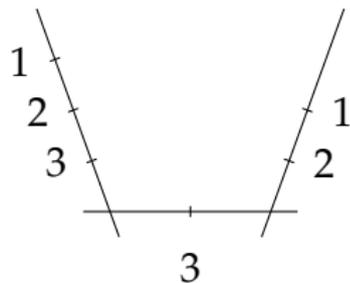
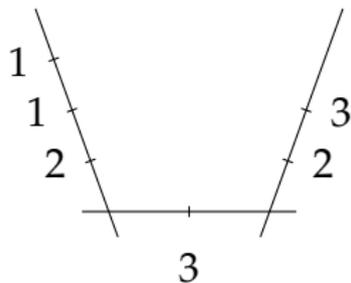
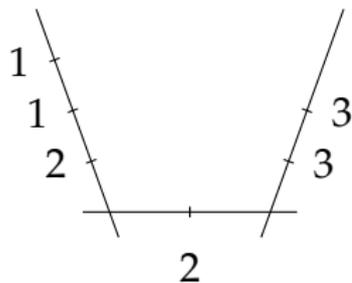
Por ejemplo, empezamos con:



# REDUCCIONES POSIBLES DE $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

Etiquetados posibles para los 6 puntos

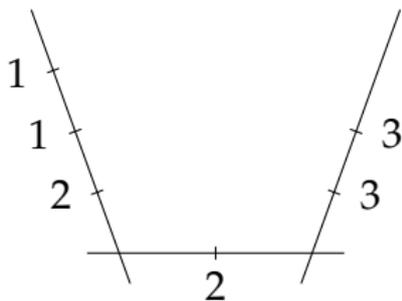
Para el el hay 3 opciones de etiquetado:



# REDUCCIONES POSIBLES DE $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

La reducción de  $Y$  dada por  $\bar{X}$

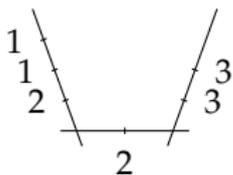
Finalmente, mostramos como calcular la reducción de  $Y$ , a partir de del grafo decorado de  $\bar{X}$ :



# REDUCCIONES POSIBLES DE $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

La reducción de  $Y$  dada por  $\bar{X}$

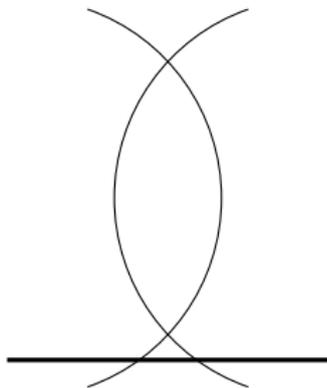
Finalmente, mostramos como calcular la reducción de  $Y$ , a partir de del grafo decorado de  $\bar{X}$ :



# REDUCCIONES POSIBLES DE $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

La reducción de  $Y$  dada por  $\bar{X}$

Finalmente, mostramos como calcular la reducción de  $Y$ , a partir de del grafo decorado de  $\bar{X}$ :



# RESULTADO PRINCIPAL

## Teorema

Sea  $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$  una curva de género 3 con grupo de automorfismos conteniendo el grupo de Klein y tal que  $Y/V_4$  tiene género 0. Entonces existen 14 posibilidades diferentes para la fibra especial de su modelo estable.

# RESULTADO PRINCIPAL

## Teorema

Sea  $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$  una curva de género 3 con grupo de automorfismos conteniendo el grupo de Klein y tal que  $Y/V_4$  tiene género 0. Entonces existen 14 posibilidades diferentes para la fibra especial de su modelo estable.

Además, estos tipos están caracterizados por las valuaciones de los invariantes de la curva.

# POSIBLES REDUCCIONES ESTABLES DE $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$

La lista completa



Lop



Loop



Loop



DNA



Candy



Cave



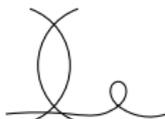
Winky cat



Tree



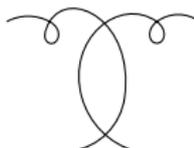
Grl pwr



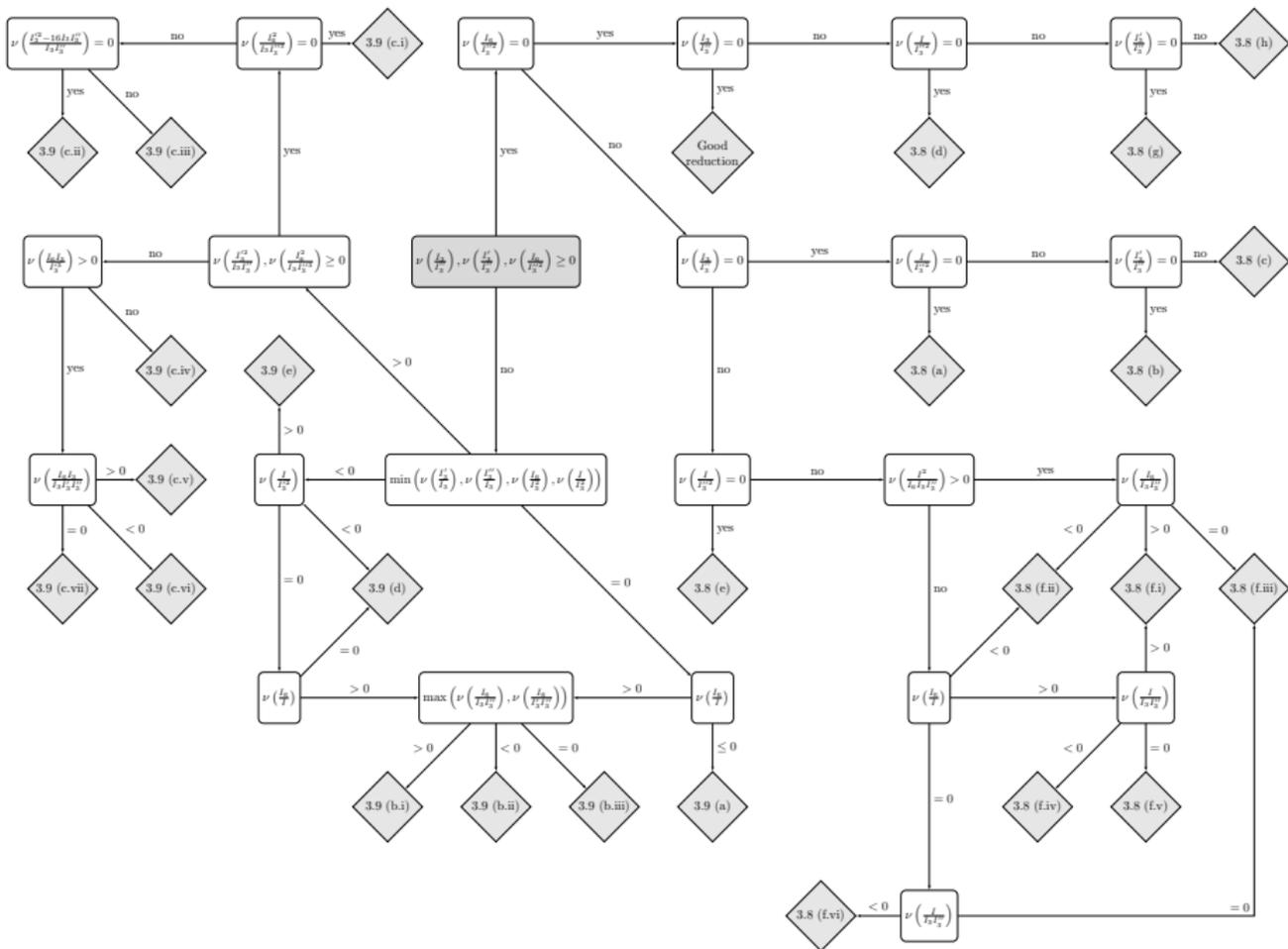
Garden



Braid



Cat



## EJEMPLO

### Proposición

Sea  $Y \in \mathcal{M}_{3,V_4}$  una cuártica de Ciani  $Ax^4 + By^4 + Cz^4 + ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = 0$  con  $\nu(ABC) = 0$ ,  $\nu(\Delta(X)) > 0$  y tal que exactamente una de las valuaciones  $\nu(a^2 - 4BC)$ ,  $\nu(b^2 - 4AC)$  y  $\nu(c^2 - 4AB)$  sea positiva.

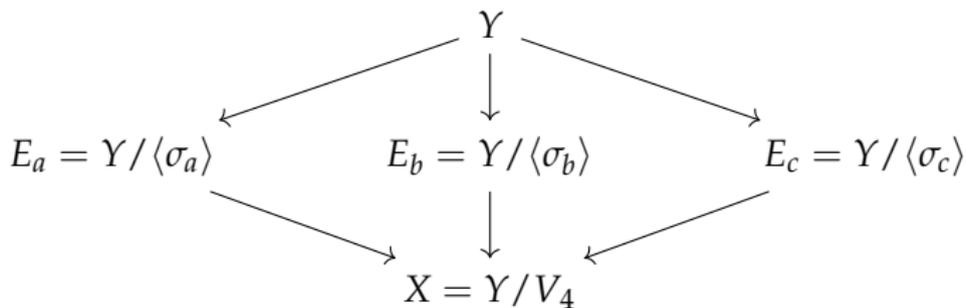
Entonces, la reducción estable de  $Y$  es:

- (i) DNA si  $\nu(\Delta_a\Delta_b\Delta_c) > \nu(\Delta(X))$ ;
- (ii) Braid si  $\nu(\Delta_a\Delta_b\Delta_c) < \nu(\Delta(X))$ ;
- (iii) Candy si  $\nu(\Delta_a\Delta_b\Delta_c) = \nu(\Delta(X))$ ;

# DETALLES DE LA PRUEBA

## Setup

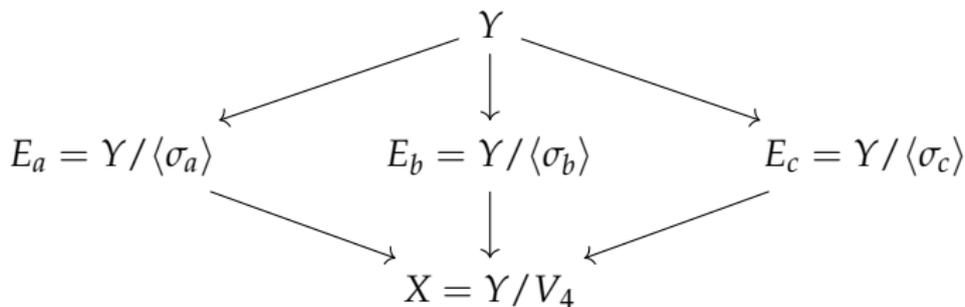
Sean  $\sigma_a(x : y : z) = (-x : y : z)$ ,  $\sigma_b(x : y : z) = (x : -y : z)$ , y  $\sigma_c = \sigma_a\sigma_b = (x : y : -z)$ . Entonces se tiene el diagrama siguiente:



# DETALLES DE LA PRUEBA

## Setup

Sean  $\sigma_a(x : y : z) = (-x : y : z)$ ,  $\sigma_b(x : y : z) = (x : -y : z)$ , y  $\sigma_c = \sigma_a\sigma_b = (x : y : -z)$ . Entonces se tiene el diagrama siguiente:



Sea  $\alpha$  una raíz del polinomio  $t^2 - 2at + 4BC$  con discriminante  $\Delta_a = a^2 - 4BC$ , y sean

$$\{P_a, P'_a\} = \{(0 : \alpha : -2B), (0 : -2C : \alpha)\}$$

dos de los puntos de ramificación. Reducen al mismo punto en  $\bar{X}$  si y sólo si  $v(\Delta_a) > 0$ .

## DETALLES DE LA PRUEBA

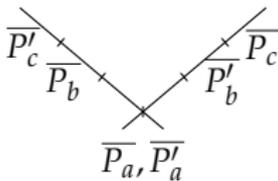
### La reducción naive

Supongamos  $\nu(a^2 - 4BC) > 0$ .

## DETALLES DE LA PRUEBA

### La reducción naive

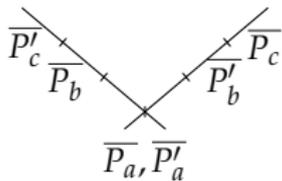
Supongamos  $\nu(a^2 - 4BC) > 0$ . Además  $\nu(\Delta(X)) > 0$ , así que la fibra especial de  $X$  degenera,



## DETALLES DE LA PRUEBA

### La reducción naiva

Supongamos  $\nu(a^2 - 4BC) > 0$ . Además  $\nu(\Delta(X)) > 0$ , así que la fibra especial de  $X$  degenera,



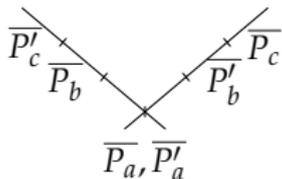
Consideramos la coordenada  $\zeta : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  que envía  $P'_b$  y  $P_c$  a 0,  $P_b$  y  $P'_c$  a  $\infty$  y  $P_a$  a 1, es decir,

$$\zeta = \frac{4AB(\alpha\beta - 2\gamma C)}{\beta\gamma(\alpha\gamma - 2\beta B)} \frac{u + \gamma/2Av + \beta/2Aw}{u + 2B/\gamma v + 2C/\beta w}.$$

## DETALLES DE LA PRUEBA

### La reducción naive

Supongamos  $\nu(a^2 - 4BC) > 0$ . Además  $\nu(\Delta(X)) > 0$ , así que la fibra especial de  $X$  degenera,



Consideramos la coordenada  $\zeta : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  que envía  $P'_b$  y  $P_c$  a 0,  $P_b$  y  $P'_c$  a  $\infty$  y  $P_a$  a 1, es decir,

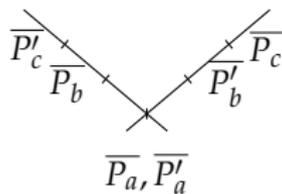
$$\zeta = \frac{4AB(\alpha\beta - 2\gamma C)}{\beta\gamma(\alpha\gamma - 2\beta B)} \frac{u + \gamma/2Av + \beta/2Aw}{u + 2B/\gamma v + 2C/\beta w}.$$

El tipo de reducción de  $X$  dependerá del valor de

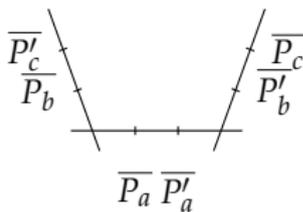
$$\overline{\zeta(P'_a)} = \frac{B(\alpha\beta - 2\gamma C)^2}{C(\alpha\gamma - 2\beta B)^2}.$$

# DETALLES DE LA PRUEBA

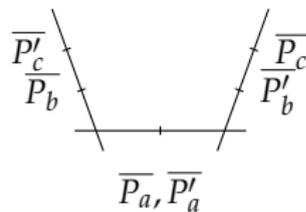
## Posibles blow-ups.



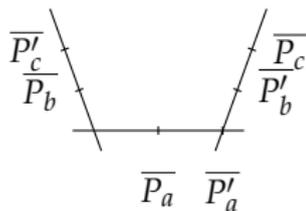
Inicio.



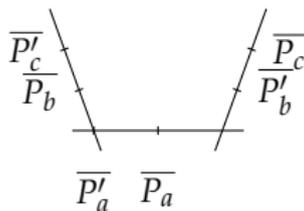
$$\overline{\zeta(P'_a)} \neq 0, 1, \infty.$$



$$\overline{\zeta(P_a)} = \overline{\zeta(P'_a)} = 1.$$



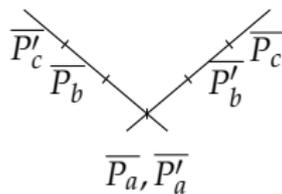
$$\overline{\zeta(P'_a)} = \overline{\zeta(P_c)} = 0.$$



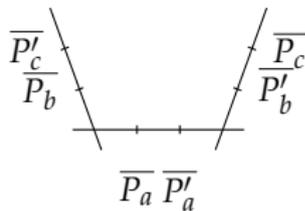
$$\overline{\zeta(P'_a)} = \overline{\zeta(P_b)} = \infty.$$

# DETALLES DE LA PRUEBA

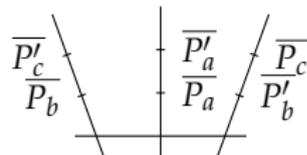
## Posibles blow-ups.



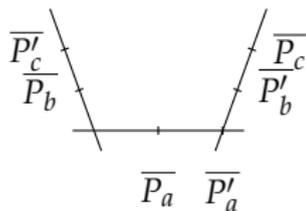
Inicio.



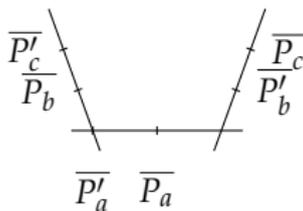
$$\overline{\xi(P'_a)} \neq 0, 1, \infty.$$



$$\overline{\xi(P_a)} = \overline{\xi(P'_a)} = 1.$$



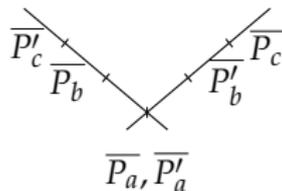
$$\overline{\xi(P'_a)} = \overline{\xi(P_c)} = 0.$$



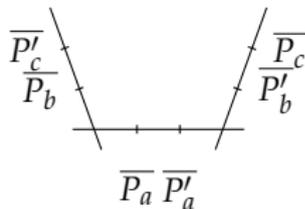
$$\overline{\xi(P'_a)} = \overline{\xi(P_b)} = \infty.$$

# DETALLES DE LA PRUEBA

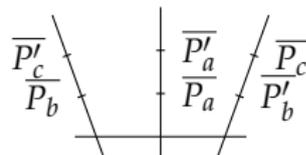
## Posibles blow-ups.



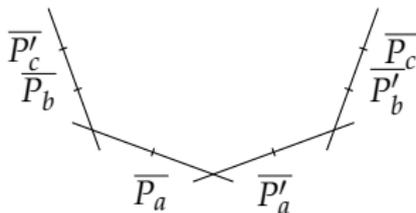
Inicio.



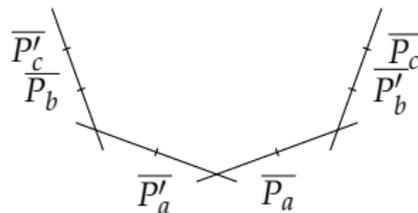
$$\overline{\zeta(P'_a)} \neq 0, 1, \infty.$$



$$\overline{\zeta(P_a)} = \overline{\zeta(P'_a)} = 1.$$



$$\overline{\zeta(P'_a)} = \overline{\zeta(P_b)} = \infty.$$



$$\overline{\zeta(P'_a)} = \overline{\zeta(P_b)} = \infty.$$

¡Gracias por vuestra atención!