Formas modulares Sobreconvergentes vía métodos perfectoides

En Colaboración con
Ben Heuer y
Chris Williams

§ Introducción

Def^{n}: (Analítica) Una forma modular es una función holomorfa

$$f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.q.}$$

- $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{k} f(z)$ nivel

  donde $z \in \mathcal{H}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N) = \left\{ \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}$

  $N \geq 3$

  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ (Peso)

- $f(z) = \sum a_n(f) q^n$ $q = e^{2\pi i z}$

  decimos que es Cuspidal si $a_0 = 0$

- $M_k(\Gamma_1(N))$ espacio de formas modulares y $S_k(\Gamma_1(N))$ espacio de formas cuspidales.

Alternativamente, podemos comenzar con la curva modular

$$X_1(N) = \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H} \qquad \boxed{X_1^*(N) \text{ versión compacta}}$$

Sobre ella existe una Curva Elíptica Universal

$$\mathcal{E} \xrightarrow{p} X_1(N)$$

Con esto definimos un haz $\omega = p_* \Omega_{\mathcal{E}/X_1(N)}$

y construimos $\omega^k = \omega^{\otimes k}$

Con esta definición, las formas modulares son sus secciones.

¿Cómo vemos que estas definiciones son iguales?

Analítica

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\Gamma_1(N)"'] & \widetilde{X_1(N)} \arrow[d, "h"] \\
\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H} \arrow[r, equal] & X_1(N)
\end{tikzcd}$$

Recubrimiento Universal

$\longrightarrow E_\tau \quad \beta_1, \beta_2 \in H_1(E_\tau, \mathbb{Z})$

$\omega \qquad \int_{\beta_1} \eta = 1$

El pullback $h^* \omega^k$ se trivializa canonicamente sobre $\mathcal{H}$, entonces sus secciones son todas de la forma $\underline{f \cdot \eta_{can}^{\otimes k}}$, $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

Los f que descienden a $X_1(N)$ son exactamente las formas modulares.

- Hoy veremos (siguiendo ideas de Chojecki-Hansen-Johansson)

Como podemos definir un "analogo p-adico a $\mathcal{H}$"

§ Hacia el mundo p-adico.

- Formas modulares tienen propiedades p-adicas

Por ejemplo: Si $k_1 \equiv k_2 \mod p^n(p-1)$

$(p, N) = 1$. $f \in S_{k_1}(\Gamma_1(Np))$ $g \in S_{k_2}(\Gamma_1(Np))$

$$a_p(f) \equiv a_p(g) \mod p^{M(n)}$$

Para entender estos fenomenos, necesitamos definiciones p-adicas.

Conversando con Serre, Katz, Coleman, ..., Andreatta - Iovita - Pilloni, tenemos buenas definiciones por vías algebraicas.

En breve, existe un espacio ádico (rígido) de pesos $\mathcal{W}$, cuyos puntos corresponden a $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ hom. continuos

$$x \mapsto x^k \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Podemos asociar un espacio de formas modulares sobreconvergentes

$$S_\kappa^\dagger(\Gamma_1(N_p))$$

- estos espacios son de dimensión infinita

- $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $S_k^\dagger(\Gamma_1(N_p)) \supseteq S_k(\Gamma_1(N_p))$

- Tenemos buena teoría de operadores Hecke con U_p compacto (entonces se pueden estudiar sus valores propios)

§ Nuevas definiciones.

Comenzamos recordando que la curva modular

$$X = X(\Gamma(N)) = X_{\Gamma(N)} \qquad N \geq 3.$$

parametriza pares (E, α_N) donde

E es una curva elíptica y

$$\alpha_N : \left(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right)^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$$

Similarmente, $X_{\Gamma_0(p)} = X_{\Gamma_0(p), \Gamma(N)}$

parametriza tríos de (E, α_N, D)

(E, α_N) son como arriba y

D es un subesquema $E[p]$ isomorfico

a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} X_{\Gamma(p^n)} & & \left(E, \alpha_N, \alpha_{p^n} : \left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)^2 \xrightarrow{\sim} E[p^n]\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\Gamma_0(p^n)} & & \left(E, \alpha_N, \langle \alpha_{p^n}(1,0) \rangle\right) \end{array}$$

$X_{P(N)}$ $\qquad\qquad$ (E, α_N)

Vamos a denotar por $\mathcal{X}, \mathcal{X}_{\Gamma_0(p^n)}, \dots \mathcal{X}^*$

a los espacios ádicos asociados a estas curvas

sobre un cuerpo perfectoide L

(Por ejemplo $L = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})^\wedge =: \mathbb{Q}_p^{cyc}$)

Finalmte, $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ tal que $p^\varepsilon \in |L|$

denotamos por $\mathcal{X}(\varepsilon)$, $\mathcal{X}_{\Gamma_0(p^n)}(\varepsilon)$

a los subespacios donde la invariante de Hasse Ha, es tal que

$$|\widetilde{Ha}| \geq |p|^\varepsilon.$$

- Los puntos de $\mathcal{X}(p^{-n}\varepsilon)$ corresponden a pares (E, α_N) tal que

E tiene un subgrupo canónico $H_n \subseteq E[p^n]$

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{X}_{\Gamma(p^n)}(\varepsilon) & = & \mathcal{X}_{\Gamma(p^n)}(\varepsilon)_c & \sqcup & \mathcal{X}_{\Gamma(p^n)}(\varepsilon)_a \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{X}_{\Gamma_0(p)}(\varepsilon) & = & \mathcal{X}_{\Gamma_0(p)}(\varepsilon)_c & \sqcup & \mathcal{X}_{\Gamma_0(p)}(\varepsilon)_a \\
 & & \nearrow & & \downarrow \\
 & & (E, \alpha_N, H) & & (E, \alpha_N, D') \\
 & & \nearrow & & \\
 & & \text{subgrupo canonico} & & D' \cap H = \phi
\end{array}
$$

<u>Teo:</u> (Scholze, Caraiani-Scholze)

Existen espacios perfectoides (únicos)

$$\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)} \sim \varprojlim_n \mathcal{X}_{\Gamma(p^n)}$$

$$\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a \sim \varprojlim_n \mathcal{X}_{\Gamma(p^n)}(\varepsilon)_a$$

Sirve también para Γ_1, Γ_0

Junto con un mapa de periodos Hodge-Tate

$$\pi_{HT} : \mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^{1,an}$$

$$(E, \alpha_N, \alpha : \mathbb{Z}_p^2 \xrightarrow{\sim} T_p E)$$

- Este mapa es equivariante con respecto a la accion de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ y la accion Hecke (fuera de p)

$$\left[\begin{array}{c} 0 \to \mathrm{Lie}(E)(1) \to T_pE \otimes \mathbb{C}_p \to \omega_E \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \wr\| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathbb{C}_p^2 \\ \pi_{HT}(E) = (\alpha \otimes 1)^{-1} (\mathrm{Lie}\, E) \subseteq \mathbb{C}_p^2 \end{array} \right]$$

-
$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)} \arrow[r, "\pi_{HT}"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{P}^1 \\ \mathcal{X} \quad \omega \end{tikzcd}$$

$$q^* \omega = \pi_{HT}^* \mathcal{O}(1)$$

1) Fijamos $w \geq 0$ $\exists$ $\varepsilon_w > 0$ t.q

$$\pi_{HT}\left(\chi_{T'(p^0)}(\varepsilon)_\alpha \right) \subseteq B_w(\mathbb{Z}_p : 1) \subseteq \mathbb{P}^{1,an}$$

Bola de radio w
alrededor de puntos
$(\alpha : 1) \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}_p)$

2) Fijamos z un parametro alrededor de $\infty \in \mathbb{P}^1$

$$\underset{z}{\mathbb{A}^1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$$

$$\xi = \pi_{HT}^{*}(z) \quad \left(\text{Va hacer el rol de } z \in \gamma \right)$$

La accion de $Gl_2(\mathbb{Q}_p)$, hace que

$$\gamma^{*}\xi = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$

3) Fijamos $k \in W$, w_k, ε_{w_k} tal que

$$\pi_{HT}\left(\chi_{T'(p^0)}(\varepsilon_{w_k})_\alpha \right) \subseteq B_{w_k}(\mathbb{Z}_p : 1)$$

Podemos definir, $c \in p\mathbb{Z}_p$, $d \in \mathbb{Z}_p^{\times}$

$$\begin{tikzcd} K(C\zeta td): \mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a \arrow[r, "\pi_{HT}"] & B_\omega(\mathbb{Z}_p:1) \arrow[r, "CZtd"] & B_\omega(\mathbb{Z}_p^\times:1) \arrow[d, "K"] \\ & & \mathbb{G}_m^{an} \end{tikzcd}$$

(este es el análogo de $(CZtd)^K$

<u>Def</u>^{n}: Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$, $K \in W$ definimos un haz ω_n^K tal que:

$$\omega_n^K(U) = \left\{ f \in f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a}(U) \;\middle|\; \gamma^* f = K^{-1}(C\zeta td) f \right\}$$
$$\forall \gamma \in \Gamma_0(p^n)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{X}_{\Gamma_0(p^n)}(\varepsilon)_a \end{tikzcd}$$

Galois con grupo $\Gamma_0(p^n)$

{ hay versiones integrales, cambiando $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a}$ por $\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a}$]

Teo: (B-Heuer-Williams)

Estos haces sobreconvergentes coinciden con los de A-I-P, y los operadores de Hecke también coinciden