Soluciones de ecuaciones algebraicas que involucran la función j de Klein

Sebastián Herrero
Trabajo en colaboración con Sebastian Eterović (UC Berkeley)

Instituto de Matemáticas PUCV

LATeN, Agosto 2020

Algunas definiciones

Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
El grupo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

actúa en $\mathbb{H}$ vía

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Esta acción se extiende a una acción del grupo

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}, ad - bc > 0 \right\}$$

en $\mathbb{H}$.

La función j

La función j de Klein es la única función analítica $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ que es $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariante y con expansión de Fourier

$$j(z) = q^{-1} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n, \quad \text{donde } q := e^{2\pi i z}.$$

Felix Klein (1849 - 1925)

La función j induce $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}$ y es compatible con interpretación modular:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \simeq \{E|_{\mathbb{C}} \text{ curva elíptica}\}/\mathrm{isom.} \xrightarrow{j} \mathbb{C}.$$

Problemas de interés

Sea $n \geq 1$ entero.
Definimos $j : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^n$ como

$$j(z_1, \ldots, z_n) = (j(z_1), \ldots, j(z_n)).$$

Sea $V \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ una variedad algebraica irreducible. En este trabajo investigamos las siguientes preguntas:

1. ¿Bajo qué condiciones en V podemos asegurar que existen puntos $\mathbf{z}$ en $\mathbb{H}^n$ con $(\mathbf{z}, j(\mathbf{z})) \in V$?
2. Dado un subcuerpo K de $\mathbb{C}$ fin. gen. tal que V está definida sobre K, ¿bajo qué condiciones podemos asegurar que existen puntos como en 1. que sean *genéricos* sobre K?

Por punto en V *genérico* sobre K nos referimos a un punto $p = (p_1, \ldots, p_{2n})$ en V con $\mathrm{gr.tr.}_K K(p_1, \ldots, p_{2n}) = \dim(V)$.

Otra formulación

$V \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ una variedad algebraica irreducible.
Definamos

$$\mathrm{Graf}(j) := \{(\mathbf{z}, j(\mathbf{z})) : \mathbf{z} \in \mathbb{H}^n\}.$$

Nos interesa saber:

1. ¿Bajo qué condiciones en V podemos asegurar que $V \cap \mathrm{Graf}(j)$ es no vacío?
2. Dado un subcuerpo K de $\mathbb{C}$ fin. gen. tal que V está definida sobre K, ¿bajo qué condiciones podemos asegurar que existen puntos en $V \cap \mathrm{Graf}(j)$ que sean *genéricos* sobre K?

Primeros ejemplos

En $\mathbb{C}^2$:

1. Si $V = \{a\} \times \mathbb{C}$, entonces

$$V \cap \mathrm{Graf}(j) = \begin{cases} \{(a, j(a))\} & \text{si } a \in \mathbb{H}, \\ \emptyset & \text{si } a \notin \mathbb{H}. \end{cases}$$

2. Si $V = \mathbb{C} \times \{a\}$, entonces

$$V \cap \mathrm{Graf}(j) = \{(\gamma z_0, a) : \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\}$$

donde z_0 es un elemento de $\mathbb{H}$ con $j(z_0) = a$.

En $\mathbb{C}^4$:

3. Si $V = \{(z_1, z_2, w_1, w_2) : z_1 = z_2, w_1 = w_2 + 1\}$ entonces

$$V \cap \mathrm{Graf}(j) = \emptyset.$$

Otros ejemplos: polinomios modulares

Denotamos por $\{\Phi_m(X,Y)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}[X,Y]$ la familia de polinomios modulares. Estos polinomios satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\Phi_m(X,Y)$ es irreducible en $\mathbb{C}[X,Y]$.
2. Para z_1, z_2 en $\mathbb{H}$ tenemos $\Phi_m(j(z_1), j(z_2)) = 0$ si y sólo si existe g en $M_2^+(\mathbb{Z})$ con $\det(g) = m$ y $gz_1 = z_2$.
3. Interpretación modular: $\Phi_m(j(E_1), j(E_2)) = 0$ si y sólo si existe isogenia cíclica $E_1 \to E_2$ de grado m.

Otro ejemplo:

4. Si tomamos $m \geq 1$ y g en $M_2^+(\mathbb{Z})$ como arriba, entonces para

$$V = \{(z_1, z_2, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^4 : z_1 = g \cdot z_2, \Phi_m(w_1, w_2) = 1\},$$

tenemos $V \cap \mathrm{Graf}(j) = \emptyset$.

Resultados relacionados I

Si $V \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ es una variedad algebraica con $V \cap \mathrm{Graf}(j) \neq \emptyset$, entonces para toda componente[1] U de $V \cap \mathrm{Graf}(j)$ se tiene

$$\dim(U) \geq \dim(V) - n.$$

Si $\dim(U) > \dim(V) - n$, decimos que U es una *componente atípica* de $V \cap \mathrm{Graf}(j)$.

Ejemplo: Supongamos $n \geq 2$ y sea $W \subset \mathbb{C}^n$ de la forma $W = \{\Phi_m(w_i, w_j) = 0\}$ o $W = \{w_k = c\}$ con $m \geq 1$ entero y $c \in \mathbb{C}$. Si $V := \mathbb{C}^n \times W$, entonces toda componente de $V \cap \mathrm{Graf}(j)$ es atípica.

[1] analítica irreducible

Resultados relacionados I

Sea $\pi_2 : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ la proyección en las últimas n coordenadas.

Theorem (Pila–Tsimerman, 2016)

Sea $V \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ es una variedad algebraica con $V \cap \mathrm{Graf}(j) \neq \emptyset$ y sea U una componente de $V \cap \mathrm{Graf}(j)$. Si $\dim(U) > \dim(V) - n$ (componente atípica), entonces $\pi_2(U)$ está contenida en una subvariedad débilmente especial de $\mathbb{C}^n$.

Una *subvariedad débilmente especial* de $\mathbb{C}^n$ es (componente irreducible de) intersección finita de variedades de la forma $\{\Phi_m(w_i, w_j) = 0\}$ o $\{w_k = c\}$ con $m \geq 1$ entero y $c \in \mathbb{C}$.

Observaciones:

1. El teorema es vacío cuando $V \cap \mathrm{Graf}(j) = \emptyset$.
2. Para $V \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ *genérica* de dimensión n, el teorema nos dice que si $V \cap \mathrm{Graf}(j) \neq \emptyset$ entonces $\dim(V \cap \mathrm{Graf}(j)) = 0$. Por lo tanto, encontrar puntos genéricos en $V \cap \mathrm{Graf}(j)$ *no debería ser trivial*.

Resultados relacionados II

Para $n \geq 1$ entero definimos $e : \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^\times)^n$ como

$$e(\mathbf{z}) = e(z_1, \dots, z_n) = (e^{z_1}, \dots, e^{z_n}).$$

Sea $V \subseteq \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^\times)^n$ una variedad algebraica irreducible.
Definamos

$$\mathrm{Graf}(e) := \{(\mathbf{z}, e(\mathbf{z})) : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Se han estudiado los siguientes problemas:

1. ¿Bajo qué condiciones en V podemos asegurar que $V \cap \mathrm{Graf}(e) \neq \emptyset$?
2. Dado un subcuerpo K de $\mathbb{C}$ fin. gen. tal que V está definida sobre K, ¿bajo qué condiciones podemos asegurar que existen puntos en $V \cap \mathrm{Graf}(e)$ que sean *genéricos* sobre K?

Motivación: Teoría de modelos de $(\mathbb{C}, +, \cdot, e^z, 0, 1)$ y la teoría de cuerpos pseudo-exponenciales de Zilber.

Resultados relacionados II

Denotemos por $\pi_1 : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ la proyección en las primeras n coordenadas.

Theorem (D'Aquino–Fornasiero–Terzo, 2018)

Si $V \subseteq \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^\times)^n$ es una variedad algebraica irreducible tal que $\pi_1(V)$ es Zariski denso en $\mathbb{C}^n$, entonces $V \cap \mathrm{Graf}(e)$ contiene infinitos puntos. Mas aún, $\pi_1(V \cap \mathrm{Graf}(e))$ es Zariski denso en $\mathbb{C}^n$.

Resultado para $V \cap \mathrm{Graf}(j) \neq \emptyset$

Recordar que $\pi_1 : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ es la proyección en las primeras n coordenadas.

Theorem (Eterović–H., 2019)

Si $\pi_1(V)$ es Zariski denso en $\mathbb{C}^n$, entonces $V \cap \mathrm{Graf}(j)$ contiene infinitos puntos. Mas aún, $\pi_1(V \cap \mathrm{Graf}(j))$ es Zariski denso en $\mathbb{C}^n$.

Podemos explicar la idea de la demostración con un ejemplo juguete [$\rightsquigarrow$ OneNote].

Ejemplo juguete

jueves, 27 de agosto de 2020 7:29

Resultado para $V \cap \mathrm{Graf}(j) \neq \emptyset$

Supongamos $V = \{p(x,y)=0\} \subset \mathbb{C}^2$, $\frac{\partial p}{\partial y} \neq 0$ $\left(\Leftrightarrow \pi_1(V) \subseteq \mathbb{C} \text{ Zar. denso} \right)$

Idea: Escoger $\boxed{(x_0, w)} \in V \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{C})$ con $\frac{\partial p}{\partial y}(x_0, w) \neq 0$

T.F.I: $\Rightarrow V \underset{\text{localmente}}{=} \{ (z, \underline{F(z)}) : z \in U \}$ $\quad U \subseteq \mathbb{C}$ bola ab.

$U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$

$F : U \to \mathbb{C}$ analítica

Buscamos resolver la ec:

$$F(z) = j(z), \quad z \in U \cap \mathbb{H}$$

$j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ sobre $\Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{H} : \boxed{j(z_0) = F(x_0)}$

Además $\exists\, \varepsilon, \delta > 0$ tq. $\underline{|j(z) - F(x_0)| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall z \in \partial B(z_0, \delta)}$

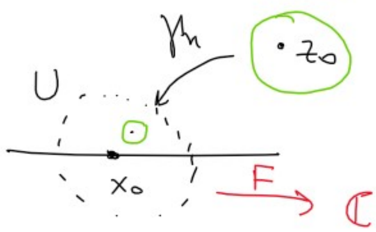
Acción de $SL_2(\mathbb{Z})$

Existe $(\gamma_n)_n$ en $SL_2(\mathbb{Z})$ tq.

$$\underline{\underline{\gamma_n}} \cdot z_0 \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$$

De hecho: $\gamma_n \cdot B(z_0, \delta) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ unif.

Para $z \in \underline{\partial(\gamma_n \cdot B(z_0, \delta))}$



$$|F(x_0) - j(z)| = |F(x_0) - j(\underbrace{\gamma_n^{-1} z}_{\partial B(z_0,\delta)})| \geq \varepsilon > \underbrace{|F(x_0) - F(z)|}_{\text{si } n \gg 0}.$$

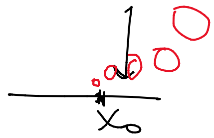
T. de Rouché: $F(x_0) - j(z)$ y $F(\cancel{x_0}) - j(z) - \underbrace{(F(\cancel{x_0}) - F(z))}_{\text{perturbación pequeña en } \partial \gamma_n B(z_0, \delta)}$

$\Rightarrow$ Estas funciones tienen = número de ceros en $B(z_0, \delta)$

Pero $F(x_0) - j(z)$ tiene cero en $z = \gamma_n z_0$

Conclusión: $\underbrace{F(z) - j(z)}$ tiene cero en $\gamma_n B(z_0, \delta)$

$F(z) = j(z)$ es soluble en $\gamma_n \cdot B(z_0, \delta)$



Existencia de soluciones genéricas: para e^z

Para la función exponencial, tenemos el siguiente resultado condicional.

Theorem (Mantova, 2016)

Sea $V \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica irreducible tal que V no es una recta horizontal o vertical, y sea K un subcuerpo de $\mathbb{C}$ fin. gen. tal que V está definida sobre K. Entonces, asumiendo la **conjetura de Schanuel**, *existen puntos en $V \cap \mathrm{Graf}(e)$ que son genéricos sobre K.*

La **conjetura de Schanuel** es la siguiente: para $z_1, \ldots, z_m$ en $\mathbb{C}$ se tiene

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_m, e^{z_1}, \ldots, e^{z_m}) \geq \dim_{\mathbb{Q}-e.v.}(\mathbb{Q}z_1 + \ldots + \mathbb{Q}z_n).$$

Esta conjetura es un teorema (Lindemann–Weierstraß) cuando $z_1, \ldots, z_m \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Existencia de soluciones genéricas: para j

Theorem (Eterović–H., 2019)

Sea $V \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica irreducible tal que V no es una recta horizontal o vertical, y sea K un subcuerpo de $\mathbb{C}$ fin. gen. tal que V está definida sobre K. Entonces, asumiendo la **conjetura de Schanuel modular**, *existen puntos en $V \cap \mathrm{Graf}(e)$ que son genéricos sobre K.*

La **conjetura de Schanuel modular** es la siguiente: para $z_1, \ldots, z_m$ en $\mathbb{H}$ no CM[2] se tiene

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_m, j(z_1), \ldots, j(z_m)) \geq \# \left(\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \backslash \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \cdot z_i \right).$$

Esta conjetura es un teorema (Schneider) cuando $m = 1$.

[2] punto CM = irracional cuadrático en $\mathbb{H}$

Theorem (Eterović–H., 2019)

Sea $V \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica irreducible tal que V no es una recta horizontal o vertical, y sea K un subcuerpo de $\mathbb{C}$ fin. gen. tal que V está definida sobre K. Entonces, asumiendo la **conjetura de Schanuel modular**, *existen puntos en $V \cap \mathrm{Graf}(e)$ que son genéricos sobre K.*

Demostración con ejemplo juguete $V = \{p(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$:

1. MSC $\Rightarrow S := \{z \in \mathbb{H} \cap \overline{K} : p(z, j(z)) = 0\}$ es $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$-finito.
2. Por estimaciones de isogenias[3]: para todo z existe $M > 0$ tal que

$$g \in M_2^+(\mathbb{Z}), (gz, j(gz)) \in V \Rightarrow gz = \tilde{g}z, \det(\tilde{g}) \leq M.$$

3. Localmente $V = \{(z, F(z))\}$ y basta resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} j(z) &= F(z) \\ j(w)^{-1} &= \prod_{\substack{1 \leq m \leq M \\ w \text{ generador de } S}} \Phi_m(j(z), j(w)). \end{aligned}$$

[3] Masser–Wüstholz (1990), Pellarin (2001), Pila (2017)

Comentarios finales:

1. Se han estudiado problemas similares a los presentados en esta charla donde se consideran iteraciones de la función exponencial (D'Aquino–Fornasiero–Terzo, 2018). Para la función j también es posible considerar iteraciones, pero estas están definidas en subconjuntos propios de $\mathbb{H}$ (Eterović–H., 2019).
2. En el contexto de la función j es también natural considerar problemas similares que involucren sus derivadas (j satisface una ecuación diferencial de orden 3). En esta línea de ideas podemos citar los siguientes trabajos recientes:
   - Aslanyan, V., Eterović, S., Kirby, J., *Differential Existential Closedness for the j-function* (2020), arXiv:2003.10996.
   - Aslanyan, V., Kirby, J., *Blurrings of the j-function* (2020), arXiv:2005.10167.

Fin

¡Muchas gracias!