El cociclo de Barnes y funciones zeta sobre cuerpos cuadráticos reales

Milton Espinoza

Agosto 2020

Introducción

Sea K/F una extensión abeliana de cuerpos de números con grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

Introducción

Sea K/F una extensión abeliana de cuerpos de números con grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

A cada ideal $\mathfrak{a}$ de F, coprimo con el conductor de K/F, le corresponde un único $\sigma_{\mathfrak{a}} \in G$ por la función de Artin.

Sea K/F una extensión abeliana de cuerpos de números con grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

A cada ideal $\mathfrak{a}$ de F, coprimo con el conductor de K/F, le corresponde un único $\sigma_{\mathfrak{a}} \in G$ por la función de Artin.

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de lugares de F que contiene: (i) todos los lugares infinitos; (ii) todos los lugares finitos que ramifican en K.

Sea K/F una extensión abeliana de cuerpos de números con grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

A cada ideal $\mathfrak{a}$ de F, coprimo con el conductor de K/F, le corresponde un único $\sigma_{\mathfrak{a}} \in G$ por la función de Artin.

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de lugares de F que contiene: (i) todos los lugares infinitos; (ii) todos los lugares finitos que ramifican en K.

A cada carácter de Dirichlet $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ le corresponde

$$L_{\mathcal{S}}(\chi, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}_F \\ (\mathfrak{a}, \mathcal{S}) = 1}} \frac{\chi(\sigma_{\mathfrak{a}})}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \zeta_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma, s),$$

$$\zeta_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}_F \\ (\mathfrak{a}, \mathcal{S}) = 1, \sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

La función $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y satisface:

La función $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y satisface:

1. el producto de Euler $L_{\mathcal{S}}(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$;

La función $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y satisface:

1. el producto de Euler $L_{\mathcal{S}}(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$;
2. la ecuación funcional de Hecke, que relaciona $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ con $L_{\mathcal{S}}(\overline{\chi}, 1 - s)$;

La función $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y satisface:

1. el producto de Euler $L_{\mathcal{S}}(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$;
2. la ecuación funcional de Hecke, que relaciona $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ con $L_{\mathcal{S}}(\overline{\chi}, 1 - s)$;

La ecuación funcional de Hecke nos da el orden de anulación de $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ en $s = 0$:

$$r_{\mathcal{S}}(\chi) = \begin{cases} \mathrm{card}(\{v \in \mathcal{S} : \chi(G_v) = 1\}) & \text{si } \chi \neq 1, \\ \mathrm{card}(\mathcal{S}) - 1 & \text{si } \chi = 1. \end{cases}$$

La función $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y satisface:

1. el producto de Euler $L_{\mathcal{S}}(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$;
2. la ecuación funcional de Hecke, que relaciona $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ con $L_{\mathcal{S}}(\overline{\chi}, 1 - s)$;

La ecuación funcional de Hecke nos da el orden de anulación de $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ en $s = 0$:

$$r_{\mathcal{S}}(\chi) = \begin{cases} \mathrm{card}(\{v \in \mathcal{S} : \chi(G_v) = 1\}) & \text{si } \chi \neq 1, \\ \mathrm{card}(\mathcal{S}) - 1 & \text{si } \chi = 1. \end{cases}$$

El producto de Euler nos da una sugerente factorización.

La función $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y satisface:

1. el producto de Euler $L_{\mathcal{S}}(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$;
2. la ecuación funcional de Hecke, que relaciona $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ con $L_{\mathcal{S}}(\overline{\chi}, 1 - s)$;

La ecuación funcional de Hecke nos da el orden de anulación de $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ en $s = 0$:

$$r_{\mathcal{S}}(\chi) = \begin{cases} \mathrm{card}(\{v \in \mathcal{S} : \chi(G_v) = 1\}) & \text{si } \chi \neq 1, \\ \mathrm{card}(\mathcal{S}) - 1 & \text{si } \chi = 1. \end{cases}$$

El producto de Euler nos da una sugerente factorización.

Sea $\mathcal{S}_K$ el conjunto de lugares de K sobre aquellos en $\mathcal{S}$.

Consideremos la continuación meromorfa de

$$\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s) := \sum_{\substack{\mathfrak{A} \subset \mathbb{Z}_K \\ (\mathfrak{A}, \mathcal{S}_K) = 1}} \frac{1}{(N\mathfrak{A})^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

La función $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y satisface:

1. el producto de Euler $L_{\mathcal{S}}(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p}\notin\mathcal{S}}(1-\chi(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$;
2. la ecuación funcional de Hecke, que relaciona $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ con $L_{\mathcal{S}}(\overline{\chi}, 1-s)$;

La ecuación funcional de Hecke nos da el orden de anulación de $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ en $s = 0$:

$$r_{\mathcal{S}}(\chi) = \begin{cases} \mathrm{card}(\{v \in \mathcal{S} : \chi(G_v) = 1\}) & \text{si } \chi \neq 1, \\ \mathrm{card}(\mathcal{S}) - 1 & \text{si } \chi = 1. \end{cases}$$

El producto de Euler nos da una sugerente factorización.

Sea $\mathcal{S}_K$ el conjunto de lugares de K sobre aquellos en $\mathcal{S}$.

Consideremos la continuación meromorfa de

$$\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s) := \sum_{\substack{\mathfrak{A}\subset\mathbb{Z}_K \\ (\mathfrak{A},\mathcal{S}_K)=1}} \frac{1}{(N\mathfrak{A})^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Entonces $\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s) = \prod_{\chi\in\hat{G}} L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$ para todo $s \in \mathbb{C}$ adecuado.

En particular, la fórmula anterior implica la factorización del coeficiente principal de la serie de Taylor de $\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s)$, en $s = 0$, en términos de aquellos de las distintas $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$.

En particular, la fórmula anterior implica la factorización del coeficiente principal de la serie de Taylor de $\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s)$, en $s = 0$, en términos de aquellos de las distintas $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$.

¿Cómo son estos coeficientes de Taylor?

En particular, la fórmula anterior implica la factorización del coeficiente principal de la serie de Taylor de $\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s)$, en $s = 0$, en términos de aquellos de las distintas $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$.

¿Cómo son estos coeficientes de Taylor?

Fórmula del número de clases (en $s = 0$)

$$\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s) = -\frac{h_{\mathcal{S}_K} R_{\mathcal{S}_K}}{W_K} s^{\mathrm{card}(\mathcal{S}_K)-1} + O(s^{\mathrm{card}(\mathcal{S}_K)}),$$

- $h_{\mathcal{S}_K}$ es el número de clases del anillo de $\mathcal{S}_K$-enteros de K;
- $R_{\mathcal{S}_K}$ es el $\mathcal{S}_K$-regulador de K;
- W_K es el número de raíces de 1 en K.

En particular, la fórmula anterior implica la factorización del coeficiente principal de la serie de Taylor de $\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s)$, en $s = 0$, en términos de aquellos de las distintas $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$.

¿Cómo son estos coeficientes de Taylor?

Fórmula del número de clases (en $s = 0$)

$$\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s) = -\frac{h_{\mathcal{S}_K} R_{\mathcal{S}_K}}{W_K} s^{\mathrm{card}(\mathcal{S}_K)-1} + O(s^{\mathrm{card}(\mathcal{S}_K)}),$$

- $h_{\mathcal{S}_K}$ es el número de clases del anillo de $\mathcal{S}_K$-enteros de K;
- $R_{\mathcal{S}_K}$ es el $\mathcal{S}_K$-regulador de K;
- W_K es el número de raíces de 1 en K.

Para el resto de los coeficientes involucrados, las conjeturas de Stark afirman que estarían esencialmente dados por logaritmos de unidades del anillo de $\mathcal{S}_K$-enteros de K.

En particular, la fórmula anterior implica la factorización del coeficiente principal de la serie de Taylor de $\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s)$, en $s = 0$, en términos de aquellos de las distintas $L_{\mathcal{S}}(\chi, s)$.

¿Cómo son estos coeficientes de Taylor?

Fórmula del número de clases (en $s = 0$)

$$\zeta_{K,\mathcal{S}_K}(s) = -\frac{h_{\mathcal{S}_K} R_{\mathcal{S}_K}}{W_K} s^{\mathrm{card}(\mathcal{S}_K)-1} + O(s^{\mathrm{card}(\mathcal{S}_K)}),$$

- $h_{\mathcal{S}_K}$ es el número de clases del anillo de $\mathcal{S}_K$-enteros de K;
- $R_{\mathcal{S}_K}$ es el $\mathcal{S}_K$-regulador de K;
- W_K es el número de raíces de 1 en K.

Para el resto de los coeficientes involucrados, las conjeturas de Stark afirman que estarían esencialmente dados por logaritmos de unidades del anillo de $\mathcal{S}_K$-enteros de K.

Para casos especiales de $\mathcal{S}$, estas conjeturas adquieren un cariz bastante preciso respecto a la naturaleza de los actores.

Supongamos que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) \geq 3$ y que $\mathcal{S}$ contiene algún lugar infinito v que se descompone completamente en K. Entonces $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 1$ para todo $\chi \in \hat{G}$ y además:

Supongamos que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) \geq 3$ y que $\mathcal{S}$ contiene algún lugar infinito v que se descompone completamente en K. Entonces $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 1$ para todo $\chi \in \hat{G}$ y además:

Conjetura (Stark)

Fijemos un lugar $w \in \mathcal{S}_K$ sobre v. Entonces existe $\eta \in \mathbb{Z}_K^*$ tal que

(i) $|\eta|_{w'} = 1$ para todo $w' \in \mathcal{S}_K$ que no está sobre v;

(ii) $L'_{\mathcal{S}}(\chi, 0) = -\frac{1}{W_K} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\sigma(\eta)|_w$ para todo $\chi \in \hat{G}$;

(iii) $K(\eta^{1/W_K})/F$ es una extensión abeliana.

Supongamos que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) \geq 3$ y que $\mathcal{S}$ contiene algún lugar infinito v que se descompone completamente en K. Entonces $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 1$ para todo $\chi \in \hat{G}$ y además:

Conjetura (Stark)

Fijemos un lugar $w \in \mathcal{S}_K$ sobre v. Entonces existe $\eta \in \mathbb{Z}_K^*$ tal que

(i) $|\eta|_{w'} = 1$ para todo $w' \in \mathcal{S}_K$ que no está sobre v;

(ii) $L'_{\mathcal{S}}(\chi, 0) = -\frac{1}{W_K} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\sigma(\eta)|_w$ para todo $\chi \in \hat{G}$;

(iii) $K(\eta^{1/W_K})/F$ es una extensión abeliana.

Obs: Podemos reescribir (ii) usando funciones zeta parciales:

$$\zeta'_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma, 0) = -\frac{1}{W_K} \log |\sigma(\eta)|_w \quad \text{para todo } \sigma \in G.$$

Supongamos que $\mathrm{card}(\mathcal{S}) \geq 3$ y que $\mathcal{S}$ contiene algún lugar infinito v que se descompone completamente en K. Entonces $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 1$ para todo $\chi \in \hat{G}$ y además:

Conjetura (Stark)

Fijemos un lugar $w \in \mathcal{S}_K$ sobre v. Entonces existe $\eta \in \mathbb{Z}_K^*$ tal que

(i) $|\eta|_{w'} = 1$ para todo $w' \in \mathcal{S}_K$ que no está sobre v;

(ii) $L'_{\mathcal{S}}(\chi, 0) = -\frac{1}{W_K} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log |\sigma(\eta)|_w$ para todo $\chi \in \hat{G}$;

(iii) $K(\eta^{1/W_K})/F$ es una extensión abeliana.

Obs: Podemos reescribir (ii) usando funciones zeta parciales:

$$\zeta'_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma, 0) = -\frac{1}{W_K} \log |\sigma(\eta)|_w \quad \text{para todo } \sigma \in G.$$

Obs: Asumiendo la conjetura de arriba, Tate (84') probó que, si F y K son totalmente reales, entonces existen unidades de Stark $\eta_1, \ldots, \eta_\ell$, asociadas a distintas extensiones de F, tales que $K \subset F(\eta_1, \ldots, \eta_\ell)$.

La conjetura anterior se ha probado en varios y diversos casos. Por su carácter general, mencionamos solamente tres.

La conjetura anterior se ha probado en varios y diversos casos. Por su carácter general, mencionamos solamente tres.

- **Caso trivial:** cuando $\mathcal{S}$ contiene al menos dos lugares que se descomponen completamente en K, la ecuación funcional de Hecke nos da $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 2$ para todo $\chi \in \hat{G}$. Por ende, $\eta = 1$ satisface lo deseado.

La conjetura anterior se ha probado en varios y diversos casos. Por su carácter general, mencionamos solamente tres.

- **Caso trivial:** cuando $\mathcal{S}$ contiene al menos dos lugares que se descomponen completamente en K, la ecuación funcional de Hecke nos da $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 2$ para todo $\chi \in \hat{G}$. Por ende, $\eta = 1$ satisface lo deseado.
- **Caso $F = \mathbb{Q}$:** esencialmente, el coeficiente principal de la función zeta parcial está dado por valores especiales de la función exponencial.

La conjetura anterior se ha probado en varios y diversos casos. Por su carácter general, mencionamos solamente tres.

- **Caso trivial:** cuando $\mathcal{S}$ contiene al menos dos lugares que se descomponen completamente en K, la ecuación funcional de Hecke nos da $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 2$ para todo $\chi \in \hat{G}$. Por ende, $\eta = 1$ satisface lo deseado.
- **Caso** $F = \mathbb{Q}$**:** esencialmente, el coeficiente principal de la función zeta parcial está dado por valores especiales de la función exponencial.
- **Caso** $F =$ **cuerpo cuadrático imaginario:** el coeficiente principal está dado por valores especiales de funciones elípticas/modulares.

La conjetura anterior se ha probado en varios y diversos casos. Por su carácter general, mencionamos solamente tres.

- **Caso trivial:** cuando $\mathcal{S}$ contiene al menos dos lugares que se descomponen completamente en K, la ecuación funcional de Hecke nos da $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 2$ para todo $\chi \in \hat{G}$. Por ende, $\eta = 1$ satisface lo deseado.
- **Caso** $F = \mathbb{Q}$**:** esencialmente, el coeficiente principal de la función zeta parcial está dado por valores especiales de la función exponencial.
- **Caso** $F =$ **cuerpo cuadrático imaginario:** el coeficiente principal está dado por valores especiales de funciones elípticas/modulares.

Objetivo de la charla: Proponer una descripción de la derivada, en $s = 0$, de funciones zeta parciales cuando F es cuadrático real. Desde ahora, F es cuadrático real.

La conjetura anterior se ha probado en varios y diversos casos. Por su carácter general, mencionamos solamente tres.

- **Caso trivial:** cuando $\mathcal{S}$ contiene al menos dos lugares que se descomponen completamente en K, la ecuación funcional de Hecke nos da $r_{\mathcal{S}}(\chi) \geq 2$ para todo $\chi \in \hat{G}$. Por ende, $\eta = 1$ satisface lo deseado.
- **Caso $F = \mathbb{Q}$:** esencialmente, el coeficiente principal de la función zeta parcial está dado por valores especiales de la función exponencial.
- **Caso $F =$ cuerpo cuadrático imaginario:** el coeficiente principal está dado por valores especiales de funciones elípticas/modulares.

Objetivo de la charla: Proponer una descripción de la derivada, en $s = 0$, de funciones zeta parciales cuando F es cuadrático real. Desde ahora, F es cuadrático real.

Diferencias notables de este caso:

- El grupo de unidades de $\mathbb{Z}_F$ es infinito.
- El lugar infinito de $\mathbb{Q}$ se descompone completamente en F.

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.
Sea $\mathfrak{f}$ un ideal entero de F. Consideremos los grupos:

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.
Sea $\mathfrak{f}$ un ideal entero de F. Consideremos los grupos:

$I_F(\mathfrak{f}) := \{\text{ideales no nulos de } F \text{ coprimos con } \mathfrak{f}\}$;

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.
Sea $\mathfrak{f}$ un ideal entero de F. Consideremos los grupos:

$$I_F(\mathfrak{f}) := \{\text{ideales no nulos de } F \text{ coprimos con } \mathfrak{f}\};$$

$$P_F(\mathfrak{f}) := \{(\alpha) \in I_F(\mathfrak{f}) \ : \ \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f},\ \alpha \gg 0\};$$

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.

Sea $\mathfrak{f}$ un ideal entero de F. Consideremos los grupos:

$$I_F(\mathfrak{f}) := \{\text{ideales no nulos de } F \text{ coprimos con } \mathfrak{f}\};$$
$$P_F(\mathfrak{f}) := \{(\alpha) \in I_F(\mathfrak{f}) \ : \ \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f},\ \alpha \gg 0\};$$
$$\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}) := I_F(\mathfrak{f})/P_F(\mathfrak{f}), \quad \text{grupo de clases de rayos de } F \text{ mod } \mathfrak{f}.$$

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.

Sea $\mathfrak{f}$ un ideal entero de F. Consideremos los grupos:

$I_F(\mathfrak{f}) := \{\text{ideales no nulos de } F \text{ coprimos con } \mathfrak{f}\};$

$P_F(\mathfrak{f}) := \{(\alpha) \in I_F(\mathfrak{f}) \ : \ \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f}, \ \alpha \gg 0\};$

$\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}) := I_F(\mathfrak{f})/P_F(\mathfrak{f}),$ grupo de clases de rayos de F mod $\mathfrak{f}$.

Cada elemento de $\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f})$ se llama clase de rayos y puede ser representado por un ideal entero.

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.
Sea $\mathfrak{f}$ un ideal entero de F. Consideremos los grupos:

$I_F(\mathfrak{f}) := \{\text{ideales no nulos de } F \text{ coprimos con } \mathfrak{f}\}$;

$P_F(\mathfrak{f}) := \{(\alpha) \in I_F(\mathfrak{f}) \ : \ \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f},\ \alpha \gg 0\}$;

$\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}) := I_F(\mathfrak{f})/P_F(\mathfrak{f})$, grupo de clases de rayos de F mod $\mathfrak{f}$.

Cada elemento de $\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f})$ se llama clase de rayos y puede ser representado por un ideal entero.
Sea $[\mathfrak{a}]$ una clase de rayos con $\mathfrak{a}$ entero. Definimos la función zeta de $[\mathfrak{a}]$ mediante

$$\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) := \sum_{\substack{\mathfrak{b} \subset \mathbb{Z}_F \\ \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}]}} \frac{1}{(N\mathfrak{b})^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Inspiración: el coeficiente de Taylor constante

Con el fin de controlar mejor el problema de las unidades, usamos la función de Artin para descomponer las funciones zeta parciales en funciones zeta de clases de rayos.
Sea $\mathfrak{f}$ un ideal entero de F. Consideremos los grupos:

$I_F(\mathfrak{f}) := \{\text{ideales no nulos de } F \text{ coprimos con } \mathfrak{f}\}$;
$P_F(\mathfrak{f}) := \{(\alpha) \in I_F(\mathfrak{f}) \ : \ \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f},\ \alpha \gg 0\}$;
$\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}) := I_F(\mathfrak{f})/P_F(\mathfrak{f})$, grupo de clases de rayos de F mod $\mathfrak{f}$.

Cada elemento de $\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f})$ se llama clase de rayos y puede ser representado por un ideal entero.
Sea $[\mathfrak{a}]$ una clase de rayos con $\mathfrak{a}$ entero. Definimos la función zeta de $[\mathfrak{a}]$ mediante

$$\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) := \sum_{\substack{\mathfrak{b} \subset \mathbb{Z}_F \\ \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}]}} \frac{1}{(N\mathfrak{b})^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

$\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ que tiene un polo simple en $s = 1$.

Siegel (60') y Shintani (70') probaron que $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) \in \mathbb{Q}$ para $-s \in \mathbb{N}$.

Siegel (60') y Shintani (70') probaron que $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) \in \mathbb{Q}$ para $-s \in \mathbb{N}$.

Método de Shintani: Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante sus dos lugares reales.

Siegel (60') y Shintani (70') probaron que $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) \in \mathbb{Q}$ para $-s \in \mathbb{N}$.

Método de Shintani: Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante sus dos lugares reales.

Parametrizamos $[\mathfrak{a}]$ con $(1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \cap C$, donde $C = C(1, \varepsilon)$ es un cono en $\mathbb{R}^2_+$ generado por 1 y una unidad fundamental totalmente positiva ε que satisface $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$.

Siegel (60') y Shintani (70') probaron que $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) \in \mathbb{Q}$ para $-s \in \mathbb{N}$.

Método de Shintani: Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante sus dos lugares reales.

Parametrizamos $[\mathfrak{a}]$ con $(1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \cap C$, donde $C = C(1, \varepsilon)$ es un cono en $\mathbb{R}^2_+$ generado por 1 y una unidad fundamental totalmente positiva ε que satisface $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$.

Entonces

$$(N\mathfrak{a})^s \zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) = \sum_{\substack{\alpha \in C \cap (1+\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)}} \alpha_1^{-s} \alpha_2^{-s}.$$

Siegel (60') y Shintani (70') probaron que $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) \in \mathbb{Q}$ para $-s \in \mathbb{N}$.

Método de Shintani: Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante sus dos lugares reales.

Parametrizamos $[\mathfrak{a}]$ con $(1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \cap C$, donde $C = C(1, \varepsilon)$ es un cono en $\mathbb{R}^2_+$ generado por 1 y una unidad fundamental totalmente positiva ε que satisface $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$.

Entonces

$$(N\mathfrak{a})^s \zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) = \sum_{\substack{\alpha \in C \cap (1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)}} \alpha_1^{-s} \alpha_2^{-s}.$$

La anterior se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$, aplicando la transformada de Mellin a una función test ϕ.

Siegel (60') y Shintani (70') probaron que $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) \in \mathbb{Q}$ para $-s \in \mathbb{N}$.

Método de Shintani: Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante sus dos lugares reales.

Parametrizamos $[\mathfrak{a}]$ con $(1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \cap C$, donde $C = C(1, \varepsilon)$ es un cono en $\mathbb{R}_+^2$ generado por 1 y una unidad fundamental totalmente positiva ε que satisface $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$.

Entonces

$$(N\mathfrak{a})^s \zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], s) = \sum_{\substack{\alpha \in C \cap (1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)}} \alpha_1^{-s} \alpha_2^{-s}.$$

La anterior se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$, aplicando la transformada de Mellin a una función test ϕ.

Finalmente, se evalúa $s = -k$ ($k \in \mathbb{N}$) usando el teorema de los residuos. El resultado es que $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], -k)$ se expresa en términos de polinomios de Bernoulli. $\square$

El teorema de los residuos lleva a pensar la función test ϕ como una función generadora para los $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], -k)$.

El teorema de los residuos lleva a pensar la función test ϕ como una función generadora para los $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], -k)$.

Solomon (98'), inspirado por trabajos de Sczech (92'), estudió $\phi = \phi(\diamondsuit; z_1, z_2) \in \mathbb{R}((z_1, z_2))$ en términos combinatorios. Su objetivo era interpretar ϕ como un 1-cociclo de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$.

El teorema de los residuos lleva a pensar la función test ϕ como una función generadora para los $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], -k)$.

Solomon (98'), inspirado por trabajos de Sczech (92'), estudió $\phi = \phi(\diamondsuit; z_1, z_2) \in \mathbb{R}((z_1, z_2))$ en términos combinatorios. Su objetivo era interpretar ϕ como un 1-cociclo de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$.

Convención: Sea G un grupo multiplicativo y sea M un grupo abeliano aditivo. Supongamos que G actúa sobre M. Diremos que una función $f : G \to M$ es un 1-cociclo para esta acción si $f(ab) = f(a) + af(b)$ para todo $a, b \in G$.

El teorema de los residuos lleva a pensar la función test ϕ como una función generadora para los $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], -k)$.

Solomon (98'), inspirado por trabajos de Sczech (92'), estudió $\phi = \phi(\diamondsuit; z_1, z_2) \in \mathbb{R}((z_1, z_2))$ en términos combinatorios. Su objetivo era interpretar ϕ como un 1-cociclo de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$.

Convención: Sea G un grupo multiplicativo y sea M un grupo abeliano aditivo. Supongamos que G actúa sobre M. Diremos que una función $f : G \to M$ es un 1-cociclo para esta acción si $f(ab) = f(a) + af(b)$ para todo $a, b \in G$.

Def: Sea $\mathcal{F}$ el grupo abeliano aditivo de todas las funciones $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}((z_1, z_2))$.

El teorema de los residuos lleva a pensar la función test ϕ como una función generadora para los $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], -k)$.

Solomon (98'), inspirado por trabajos de Sczech (92'), estudió $\phi = \phi(\diamondsuit; z_1, z_2) \in \mathbb{R}((z_1, z_2))$ en términos combinatorios. Su objetivo era interpretar ϕ como un 1-cociclo de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$.

Convención: Sea G un grupo multiplicativo y sea M un grupo abeliano aditivo. Supongamos que G actúa sobre M. Diremos que una función $f : G \to M$ es un 1-cociclo para esta acción si $f(ab) = f(a) + af(b)$ para todo $a, b \in G$.

Def: Sea $\mathcal{F}$ el grupo abeliano aditivo de todas las funciones $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}((z_1, z_2))$.

Sea $\mathcal{D}$ el subgrupo de distribuciones de $\mathcal{F}$. Es decir, todas las $g \in \mathcal{F}$ que satisfacen

$$g(x; z_1, z_2) = \sum_{\substack{y \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \\ y = x}} g(ny; z_1, z_2),$$

para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y todo $x \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

A cada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ le corresponde una única matriz $\sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

A cada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ le corresponde una única matriz $\sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Teorema (Solomon, 98)

- El grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ actúa sobre $\mathcal{D}$.
- Para cada par $r, s \in \mathbb{R}^2$ adecuado, $\phi(x, r, s; z_1, z_2) \in \mathcal{D}$.
- Para cada $r \in \mathbb{R}^2$ adecuado, la función $\Psi_r : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathcal{D}$ dada por $\Psi_r(A)(x) = \phi(x, r, r\sigma_A; z_1, z_2)$ es un 1-cociclo cuya clase de cohomología es independiente de r.

A cada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ le corresponde una única matriz $\sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Teorema (Solomon, 98)

- El grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ actúa sobre $\mathcal{D}$.
- Para cada par $r, s \in \mathbb{R}^2$ adecuado, $\phi(x, r, s; z_1, z_2) \in \mathcal{D}$.
- Para cada $r \in \mathbb{R}^2$ adecuado, la función $\Psi_r : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathcal{D}$ dada por $\Psi_r(A)(x) = \phi(x, r, r\sigma_A; z_1, z_2)$ es un 1-cociclo cuya clase de cohomología es independiente de r.

Aplicaciones: Ψ da lugar a algoritmos eficientes para calcular valores especiales de $\zeta_{\mathfrak{f}}$. Además, produce versiones generales de leyes de reciprocidad para sumas de tipo Dedekind.

A cada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ le corresponde una única matriz $\sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Teorema (Solomon, 98)

- El grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ actúa sobre $\mathcal{D}$.
- Para cada par $r, s \in \mathbb{R}^2$ adecuado, $\phi(x, r, s; z_1, z_2) \in \mathcal{D}$.
- Para cada $r \in \mathbb{R}^2$ adecuado, la función $\Psi_r : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathcal{D}$ dada por $\Psi_r(A)(x) = \phi(x, r, r\sigma_A; z_1, z_2)$ es un 1-cociclo cuya clase de cohomología es independiente de r.

Aplicaciones: Ψ da lugar a algoritmos eficientes para calcular valores especiales de $\zeta_{\mathfrak{f}}$. Además, produce versiones generales de leyes de reciprocidad para sumas de tipo Dedekind.

Pregunta: ¿Puede lo anterior extenderse a $\zeta'_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], 0)$?

Obstrucciones:

Obstrucciones:

- Al tomar $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}$ en la continuación meromorfa de

$$(*) = \sum_{\substack{\alpha \in C \cap (1+\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)}} \alpha_1^{-s} \alpha_2^{-s},$$

los parámetros $\diamondsuit$ quedan encerrados en $\mathbb{R}^2_+$, lo que no permite la acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ sobre ellos.

Obstrucciones:

- Al tomar $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}$ en la continuación meromorfa de

$$(*) = \sum_{\substack{\alpha \in C \cap (1+\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)}} \alpha_1^{-s} \alpha_2^{-s},$$

  los parámetros $\diamondsuit$ quedan encerrados en $\mathbb{R}_+^2$, lo que no permite la acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ sobre ellos.
- Se debe encontrar un reemplazo para el espacio de distribuciones $\mathcal{D}$.

Nuestros resultados: el cociclo de Barnes

Obstrucciones:

- Al tomar $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}$ en la continuación meromorfa de

$$(*) = \sum_{\substack{\alpha \in C \cap (1+\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)}} \alpha_1^{-s} \alpha_2^{-s},$$

  los parámetros $\diamondsuit$ quedan encerrados en $\mathbb{R}_+^2$, lo que no permite la acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ sobre ellos.
- Se debe encontrar un reemplazo para el espacio de distribuciones $\mathcal{D}$.

La primera obstrucción se supera trabajando con la forma integral de $(*)$, en lugar de hacerlo con su serie de Dirichlet.

Obstrucciones:

- Al tomar $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}$ en la continuación meromorfa de

$$(*) = \sum_{\substack{\alpha \in C \cap (1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}) \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)}} \alpha_1^{-s} \alpha_2^{-s},$$

  los parámetros $\diamondsuit$ quedan encerrados en $\mathbb{R}^2_+$, lo que no permite la acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ sobre ellos.
- Se debe encontrar un reemplazo para el espacio de distribuciones $\mathcal{D}$.

La primera obstrucción se supera trabajando con la forma integral de $(*)$, en lugar de hacerlo con su serie de Dirichlet.

Para la segunda, definimos un espacio de distribuciones $\mathfrak{D}$ como el submódulo (de un módulo de funciones meromorfas) aniquilado por un cierto ideal de una $\mathbb{Z}$-álgebra de operadores.

Sea $\mathbb{V}$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Sea $\mathbb{V}$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Grosso modo, una distribución es una función $f : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que:

(i) $s \mapsto f(s, \delta)$ es meromorfa sobre $\mathbb{C}$ para todo $\delta \in \mathbb{V}$;

(ii) $f(s, x, \omega) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / c\mathbb{Z}^2} f(s, c^{-1}(x + \mu), c\omega)$ para todo $c \in \mathbb{Z}$ no nulo.

Sea $\mathbb{V}$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Grosso modo, una distribución es una función $f : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que:

(i) $s \mapsto f(s, \delta)$ es meromorfa sobre $\mathbb{C}$ para todo $\delta \in \mathbb{V}$;
(ii) $f(s, x, \omega) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / c\mathbb{Z}^2} f(s, c^{-1}(x + \mu), c\omega)$ para todo $c \in \mathbb{Z}$ no nulo.

Esto nos permite definir una acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ sobre $\mathfrak{D}$. Sea $f \in \mathfrak{D}$ y sea $[A] \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ con A entera. Entonces:

$$([A]f)(s, x, \omega) := \mathrm{sgn}(\det A) \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^2 A^t} f(s, (x + \mu)A^{-t}, \omega A).$$

Sea $\mathbb{V}$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Grosso modo, una distribución es una función $f : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que:

(i) $s \mapsto f(s, \delta)$ es meromorfa sobre $\mathbb{C}$ para todo $\delta \in \mathbb{V}$;

(ii) $f(s, x, \omega) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / c\mathbb{Z}^2} f(s, c^{-1}(x + \mu), c\omega)$ para todo $c \in \mathbb{Z}$ no nulo.

Esto nos permite definir una acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ sobre $\mathfrak{D}$. Sea $f \in \mathfrak{D}$ y sea $[A] \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ con A entera. Entonces:

$$([A]f)(s, x, \omega) := \mathrm{sgn}(\det A) \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^2 A^t} f(s, (x + \mu) A^{-t}, \omega A).$$

Ahora queremos probar que cierta función especial está en $\mathfrak{D}$.

Sea $\mathbb{V}$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Grosso modo, una distribución es una función $f : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \hat{\mathbb{C}}$ tal que:

(i) $s \mapsto f(s, \delta)$ es meromorfa sobre $\mathbb{C}$ para todo $\delta \in \mathbb{V}$;

(ii) $f(s, x, \omega) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2/c\mathbb{Z}^2} f(s, c^{-1}(x+\mu), c\omega)$ para todo $c \in \mathbb{Z}$ no nulo.

Esto nos permite definir una acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ sobre $\mathfrak{D}$. Sea $f \in \mathfrak{D}$ y sea $[A] \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ con A entera. Entonces:

$$([A]f)(s, x, \omega) := \mathrm{sgn}(\det A) \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2 A^t} f(s, (x+\mu)A^{-t}, \omega A).$$

Ahora queremos probar que cierta función especial está en $\mathfrak{D}$.

Def: Para $\mathrm{Re}(s) > 2$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ y $\omega \in (\mathbb{R}^*)^2$, definimos

$$\mathcal{L}(s, x, \omega) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u(\langle x \rangle \cdot \omega)}}{(1 - \mathrm{e}^{-u\omega_1})(1 - \mathrm{e}^{-u\omega_2})} u^{s-1} du.$$

Lema: Para cada (x, ω) fijo, $\mathcal{L}(s, x, \omega)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$, con polos simples en $s = 1, 2$.

Lema: Para cada (x, ω) fijo, $\mathcal{L}(s, x, \omega)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$, con polos simples en $s = 1, 2$.
Lema: La función $\mathcal{Z} : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \hat{\mathbb{C}}$, dada por

$$\mathcal{Z}(s, x, \omega) = \mathcal{L}(s, x, \omega) + \text{funciones de dimensión menor},$$

es una distribución.

Lema: Para cada (x, ω) fijo, $\mathcal{L}(s, x, \omega)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$, con polos simples en $s = 1, 2$.

Lema: La función $\mathcal{Z} : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \hat{\mathbb{C}}$, dada por

$$\mathcal{Z}(s, x, \omega) = \mathcal{L}(s, x, \omega) + \text{funciones de dimensión menor},$$

es una distribución.

Teorema (E, 2019)

El cociclo de Barnes $\psi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{D}$ dado por

$$\psi(A)(s, x, \omega) = \begin{cases} (\sigma_A \mathcal{Z})(s, x, \omega) & \text{si } c \neq 0, \\ 0 & \text{si } c = 0, \end{cases}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$, es un 1-cociclo cuya clase de cohomología no es trivial.

Lema: Para cada (x,ω) fijo, $\mathcal{L}(s,x,\omega)$ se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$, con polos simples en $s=1,2$.

Lema: La función $\mathcal{Z}:\mathbb{C}\times\mathbb{V}\to\hat{\mathbb{C}}$, dada por

$$\mathcal{Z}(s,x,\omega)=\mathcal{L}(s,x,\omega)+\text{funciones de dimensión menor},$$

es una distribución.

Teorema (E, 2019)

El cociclo de Barnes $\psi:\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\to\mathfrak{D}$ dado por

$$\psi(A)(s,x,\omega)=\begin{cases}(\sigma_A\mathcal{Z})(s,x,\omega) & \text{si } c\neq 0,\\ 0 & \text{si } c=0,\end{cases}$$

donde $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\cap\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$, es un 1-cociclo cuya clase de cohomología no es trivial.

¿Cuál es la relación entre el cociclo de Barnes y $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}],0)$?

Siguiendo a Shintani, para escribir $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$ en función del cociclo de Barnes, necesitamos un término correctivo.

Siguiendo a Shintani, para escribir $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$ en función del cociclo de Barnes, necesitamos un término correctivo.

Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante $\alpha \mapsto (v_1\alpha, v_2\alpha)$.

Siguiendo a Shintani, para escribir $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$ en función del cociclo de Barnes, necesitamos un término correctivo.

Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante $\alpha \mapsto (v_1\alpha, v_2\alpha)$.

Sea $\mathbb{V}_F$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \smallsetminus \mathbb{Z}^2) \times F^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Siguiendo a Shintani, para escribir $\zeta'_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], 0)$ en función del cociclo de Barnes, necesitamos un término correctivo.

Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante $\alpha \mapsto (v_1\alpha, v_2\alpha)$.

Sea $\mathbb{V}_F$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \times F^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Como antes, tenemos un espacio $\mathfrak{D}_F$ de distribuciones (funciones $f : \mathbb{V}_F \to \mathbb{C}$) sobre el cual $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ actúa.

Siguiendo a Shintani, para escribir $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}],0)$ en función del cociclo de Barnes, necesitamos un término correctivo.

Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante $\alpha \mapsto (v_1\alpha, v_2\alpha)$.

Sea $\mathbb{V}_F$ la colección de pares $(x,\omega) \in (\mathbb{Q}^2 \smallsetminus \mathbb{Z}^2) \times F^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Como antes, tenemos un espacio $\mathfrak{D}_F$ de distribuciones (funciones $f : \mathbb{V}_F \to \mathbb{C}$) sobre el cual $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ actúa.

Def: Definimos $\widetilde{\delta} : \mathbb{V}_F \to \mathbb{C}$ mediante

$$\widetilde{\delta}(x,\omega) = \frac{\det(v_1\omega, v_2\omega)}{4}\Big(\frac{\log\left|\frac{v_1\omega_2}{v_2\omega_2}\right|}{N_{F/\mathbb{Q}}(\omega_2)} B_2(\langle x_1\rangle) - \frac{\log\left|\frac{v_1\omega_1}{v_2\omega_1}\right|}{N_{F/\mathbb{Q}}(\omega_1)} B_2(\langle x_2\rangle)\Big),$$

donde $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$.

Siguiendo a Shintani, para escribir $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$ en función del cociclo de Barnes, necesitamos un término correctivo.

Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante $\alpha \mapsto (v_1\alpha, v_2\alpha)$.

Sea $\mathbb{V}_F$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \smallsetminus \mathbb{Z}^2) \times F^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Como antes, tenemos un espacio $\mathfrak{D}_F$ de distribuciones (funciones $f : \mathbb{V}_F \to \mathbb{C}$) sobre el cual $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ actúa.

Def: Definimos $\widetilde{\delta} : \mathbb{V}_F \to \mathbb{C}$ mediante

$$\widetilde{\delta}(x, \omega) = \frac{\det(v_1\omega, v_2\omega)}{4}\left(\frac{\log\left|\frac{v_1\omega_2}{v_2\omega_2}\right|}{N_{F/\mathbb{Q}}(\omega_2)}B_2(\langle x_1\rangle) - \frac{\log\left|\frac{v_1\omega_1}{v_2\omega_1}\right|}{N_{F/\mathbb{Q}}(\omega_1)}B_2(\langle x_2\rangle)\right),$$

donde $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$.

Lema: La función $\widetilde{\delta} \in \mathfrak{D}_F$ y es invariante por la acción de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ sobre la variable ω.

Siguiendo a Shintani, para escribir $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$ en función del cociclo de Barnes, necesitamos un término correctivo.

Incrustamos F en $\mathbb{R}^2$ mediante $\alpha \mapsto (v_1\alpha, v_2\alpha)$.

Sea $\mathbb{V}_F$ la colección de pares $(x, \omega) \in (\mathbb{Q}^2 \smallsetminus \mathbb{Z}^2) \times F^2$ tales que ω tiene coordenadas linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Como antes, tenemos un espacio $\mathfrak{D}_F$ de distribuciones (funciones $f : \mathbb{V}_F \to \mathbb{C}$) sobre el cual $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ actúa.

Def: Definimos $\widetilde{\delta} : \mathbb{V}_F \to \mathbb{C}$ mediante

$$\widetilde{\delta}(x, \omega) = \frac{\det(v_1\omega, v_2\omega)}{4}\left(\frac{\log\left|\frac{v_1\omega_2}{v_2\omega_2}\right|}{N_{F/\mathbb{Q}}(\omega_2)} B_2(\langle x_1\rangle) - \frac{\log\left|\frac{v_1\omega_1}{v_2\omega_1}\right|}{N_{F/\mathbb{Q}}(\omega_1)} B_2(\langle x_2\rangle)\right),$$

donde $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$.

Lema: La función $\widetilde{\delta} \in \mathfrak{D}_F$ y es invariante por la acción de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ sobre la variable ω.

Para cada $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$, nuestro término correctivo es $\delta(A) := \sigma_A \widetilde{\delta}$.

Teorema (E, 2020)

Para cada $i = 1, 2$, la función $\mathrm{H}_{v_i} : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{D}_F$, dada por

$$\mathrm{H}_{v_i}(A)(x, \omega) := \psi(A)'(0, x, v_i\omega) + \frac{1}{2}\delta(A)(x, \omega),$$

es un 1-cociclo.

Teorema (E, 2020)

Para cada $i = 1, 2$, la función $\mathrm{H}_{v_i} : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{D}_F$, dada por

$$\mathrm{H}_{v_i}(A)(x,\omega) := \psi(A)'(0, x, v_i\omega) + \frac{1}{2}\delta(A)(x,\omega),$$

es un 1-cociclo.

Finalmente describimos $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$.

Teorema (E, 2020)

Para cada $i = 1, 2$, la función $\mathrm{H}_{v_i} : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{D}_F$, dada por

$$\mathrm{H}_{v_i}(A)(x, \omega) := \psi(A)'(0, x, v_i\omega) + \frac{1}{2}\delta(A)(x, \omega),$$

es un 1-cociclo.

Finalmente describimos $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$.
Datos aritméticos: Fijemos $(\mathfrak{f}, [\mathfrak{a}], \varepsilon)$, donde $\mathfrak{f} \neq \mathbb{Z}_F$ y ε es una unidad fundamental totalmente positiva que satisface $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$. Por simpleza, supondremos $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], 0) = 0$.

Teorema (E, 2020)

Para cada $i = 1, 2$, la función $\mathrm{H}_{v_i} : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{D}_F$, dada por

$$\mathrm{H}_{v_i}(A)(x, \omega) := \psi(A)'(0, x, v_i\omega) + \frac{1}{2}\delta(A)(x, \omega),$$

es un 1-cociclo.

Finalmente describimos $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$.

Datos aritméticos: Fijemos $(\mathfrak{f}, [\mathfrak{a}], \varepsilon)$, donde $\mathfrak{f} \neq \mathbb{Z}_F$ y ε es una unidad fundamental totalmente positiva que satisface $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$. Por simpleza, supondremos $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], 0) = 0$.

Elección de una base: Elegimos una $\mathbb{Z}$-base $\omega \in F^2$ de $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$.

Teorema (E, 2020)

Para cada $i = 1, 2$, la función $\mathrm{H}_{v_i} : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{D}_F$, dada por

$$\mathrm{H}_{v_i}(A)(x, \omega) := \psi(A)'(0, x, v_i\omega) + \frac{1}{2}\delta(A)(x, \omega),$$

es un 1-cociclo.

Finalmente describimos $\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0)$.
Datos aritméticos: Fijemos $(\mathfrak{f}, [\mathfrak{a}], \varepsilon)$, donde $\mathfrak{f} \neq \mathbb{Z}_F$ y ε es una unidad fundamental totalmente positiva que satisface $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$. Por simpleza, supondremos $\zeta_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], 0) = 0$.
Elección de una base: Elegimos una $\mathbb{Z}$-base $\omega \in F^2$ de $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$.
Esto determina:

(i) $A = A(\varepsilon, \omega) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\varepsilon\omega = \omega A$.
(ii) $x = x(\omega) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ tal que $x\omega^t = 1$.

$$\zeta_{\mathfrak{f}}'([\mathfrak{a}], 0) = \mathrm{sgn}\big((\det \sigma_A) N_{F/\mathbb{Q}}(\omega_1)\big)\Big(\mathrm{H}_{v_1}(A)(x, \omega) + \mathrm{H}_{v_2}(A)(x, \omega)\Big).$$

Corolario: Si v_1 y v_2 se descomponen completamente en una extensión abeliana K/F, cuyo conductor es $\mathfrak{f}$, entonces $\zeta'_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma, 0) = 0$ para todo $\sigma \in G$, donde $\mathcal{S} = \{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}, v_1, v_2\}$.

Corolario: Si v_1 y v_2 se descomponen completamente en una extensión abeliana K/F, cuyo conductor es $\mathfrak{f}$, entonces $\zeta'_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma,0)=0$ para todo $\sigma\in G$, donde $\mathcal{S}=\{\mathfrak{p}|\mathfrak{f},v_1,v_2\}$.
Dos preguntas naturales y relacionadas:

Corolario: Si v_1 y v_2 se descomponen completamente en una extensión abeliana K/F, cuyo conductor es $\mathfrak{f}$, entonces $\zeta'_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma, 0) = 0$ para todo $\sigma \in G$, donde $\mathcal{S} = \{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}, v_1, v_2\}$.

Dos preguntas naturales y relacionadas:

- ¿Cómo se transforma H bajo la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sobre ω (cambio de base)?

Corolario: Si v_1 y v_2 se descomponen completamente en una extensión abeliana K/F, cuyo conductor es $\mathfrak{f}$, entonces $\zeta'_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma, 0) = 0$ para todo $\sigma \in G$, donde $\mathcal{S} = \{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}, v_1, v_2\}$.

Dos preguntas naturales y relacionadas:

- ¿Cómo se transforma H bajo la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sobre ω (cambio de base)?
- ¿En qué medida falla H para ser un invariante de clases de rayos (como lo es $\zeta'_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}], 0)$)?

Corolario: Si v_1 y v_2 se descomponen completamente en una extensión abeliana K/F, cuyo conductor es $\mathfrak{f}$, entonces $\zeta'_{K/F,\mathcal{S}}(\sigma,0)=0$ para todo $\sigma\in G$, donde $\mathcal{S}=\{\mathfrak{p}|\mathfrak{f},v_1,v_2\}$.

Dos preguntas naturales y relacionadas:

- ¿Cómo se transforma H bajo la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sobre ω (cambio de base)?
- ¿En qué medida falla H para ser un invariante de clases de rayos (como lo es $\zeta'_{\mathfrak{f}}([\mathfrak{a}],0)$)?

Teorema (E, 2020)

Para todo $B\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ y todo $\alpha\in F^*$ tal que $\alpha\equiv 1 \mod \mathfrak{f}$ y $\alpha\gg 0$, tenemos

$$\mathrm{sgn}(\det B)\mathrm{H}_{v_i}(B^{-1}AB)(xB^{-t},\alpha^{-1}\omega B)=\mathrm{H}_{v_i}(A)(x,\omega)\\ +\log(v_i\varepsilon)r(B,\omega),$$

donde $r(B,\omega)\in\mathbb{Q}$ está dado (explícitamente) por el polinomio B_2, normas de números algebraicos determinados por B y ω, y la suma de Dedekind-Rademacher.

¡Muchas gracias!