$\mathbb{Q}$-curvas

Ariel Pacetti

Universidad Nacional de Córdoba - CIEM

18 de Junio de 2020

Seminario LATeN

Ejemplos

1. Elliptic Curve 2.0.4.1-34969.3-b1
2. Elliptic Curve 2.0.4.1-100.2-a1
3. Elliptic Curve 2.0.4.1-1600.2-b1 and Modular Form 160-2-a-c
4. Elliptic Curve 2.0.3.1-4096.1-a1 and Modular Form 192-2-c-b

Charla Laten

Como ya hemos visto, dado $E/\mathbb{Q}$ curva elíptica, y p primo,

$$\rho_{E,p} : G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to Gl_2(\mathbb{Q}_p)$$

irreducible y "modular", i.e. $\exists f \in S_2(\Gamma_0(N))$ t.q. $\rho_{E,p} = \rho_{f,p}$ (Santiago)

En particular, $L(E,s)$ se extiende de forma holomorfa a $\mathbb{C}$.

Si $K/\mathbb{Q}$ es finito, dado E/K c.e., de igual forma, dado $p \in \mathbb{Z}$,

$$\rho_{E,p} : G_K \to Gl_2(\mathbb{Z}_p)$$

Pregunta: se puede extender a una rep. de $G_{\mathbb{Q}}$ 2-dimensional?

Ejemplo 1: Si $E/\mathbb{Q}$ cualquiera, y lo miramos en K,

"Claramente" $\rho_{E,p}\big|_{G_K} = \rho_{E/K,p}$ (claro en Frob q, q split, son densos)

$\Rightarrow$ se extiende de forma holomorfa.

Ejemplo 1': ~~[illegible]~~ $E \simeq \cancel{E' \otimes \chi}$, ~~$E'$ def/$\mathbb{Q}$~~. $121 \otimes \chi$.

Ejemplo 2: E : 100.2-a1 sobre $\mathbb{Q}(i)$

$j(E) \notin \mathbb{Q}$ ($\Rightarrow E \not\simeq E'$ def sobre $\mathbb{Q}$),

pero $E \underset{\text{isógena}}{\sim} \underset{E'}{20.a3}/\mathbb{Q}$. Luego $\rho_{E,p} = \rho_{E',p}\big|_{G_K}$ y por lo tanto

se extiende a $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to Gl_2(\mathbb{Z}_p) \rightsquigarrow L(E/K,s)$ se extiende

Ejemplo 3: E : 1600.2-b1 ~~$y^2 = x^3 + 2(1+i)x^2 +$~~

$y^2 + (1+i)xy = x^3 + x^2 + (27i-13)x + 69i - 3 \underset{8}{\sim} 1600.2\text{-}b2$

(dibujo como Álvaro)

En particular, si p separa en K, ~~a.~~ $p = \mathfrak{P}\cdot\overline{\mathfrak{P}}$, $a_{\mathfrak{P}}(E) = a_{\overline{\mathfrak{P}}}(E)$.

Prop: La representación $\rho_{E,p}$ se extiende a una rep. de dimensión 2

$$\tilde{\rho}_p \;\; G_{\mathbb{Q}} \to Gl_2(\overline{\mathbb{Q}}_p) \quad \text{(en realidad grado 2)}.$$

Impar e irreducible

D/ Sea $\tau \in G_{\mathbb{Q}}$ que genere $Gal(K/\mathbb{Q})$, $K = \mathbb{Q}[i]$ (τ = conj. compleja)

$\tilde{\rho}^{\tau}(\sigma) = \rho(\tau\sigma\tau^{-1}) : G_K \to Gl_2(\mathbb{Z}_p)$

$\tilde{\rho}^{\tau}$ si $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}\cdot\bar{\mathfrak{P}}$, $\rho^{\tau}(Frob_{\mathfrak{P}}) = \rho(\tau Frob_{\mathfrak{P}} \tau^{-1}) = \rho(Frob_{\bar{\mathfrak{P}}})$

Luego ρ^{τ} corresponde a $\bar{E}$.

Supongamos que $\tilde{\rho}$ existe. Luego $\tilde{\rho}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \tilde{\rho}(\tau)\tilde{\rho}(\sigma)\tilde{\rho}(\tau)^{-1}$

si $\sigma \in G_K$, $\tilde{\rho}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \rho^{\tau}(\sigma) = \tilde{\rho}(\tau)\rho(\sigma)\tilde{\rho}(\tau)^{-1}$

Por hip., $\rho^{\tau} \simeq \rho \Rightarrow \exists M \in Gl_2(\mathbb{Q}_p)$ t.q. $M\rho^{\tau}M^{-1} = \rho$, y por el lema de Schur (ρ es irred) M es única salvo $\lambda \in \mathbb{Q}_p^{\times}$.

$\Rightarrow \tilde{\rho}(\tau) = \lambda \cdot M$. Notar que si definimos $\tilde{\rho}(\tau)$ ganamos, pues si $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, σ o $\tau\sigma \in G_K$.

A la vez, $\tilde{\rho}(\tau^2) = \rho(\tau^2) = \mu M^2$, tomo $\lambda = \sqrt{\mu}$ (alguna)

$\lambda^2 M^2 = \tilde{\rho}(\tau)^2$

$\tilde{\rho}(\tau) = \sqrt{\mu}M.$

Notar que $\rho(\tau^2)\cdot\rho(\sigma)\rho(\tau^2)^{-1} = \rho(\tau^2\sigma\tau^{-2}) = M^2\rho(\sigma)M^{-2}$

$\Rightarrow \boxed{\rho(\tau^2) = \mu \cdot M^2}$. $\tilde{\rho}(\tau^2) = 1 = \lambda^2 M^2 \Rightarrow \tilde{\rho}(\tau)$ se diagonaliza $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

si $\tilde{\rho}(\tau) = \pm Id \Rightarrow M$ = diagonal $\Rightarrow \rho^{\tau} \simeq \rho$ Abs! $\Rightarrow$ impar.

Obs: ¡no vale siempre! (precisamos por ejemplo G/H sea cíclico).

Coro: $\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to Gl_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ impar, irreducible para algún p $\Rightarrow$ (conj. de Serre) $\tilde{\rho}$ es modular, $\tilde{\rho} = \rho_{f,p} \Rightarrow \rho_E = \rho_{f,p}|_{G_K}$

Volviendo al ejemplo 2: $E \rightsquigarrow$ 160.2.a.c. $\rightsquigarrow$ superficie abeliana $S/\mathbb{Q}$,

$S/_{\mathbb{Q}[i]} \sim E \times \bar{E}$ (mas endomorfismos).

Def: $K/\mathbb{Q}$ Galois, una $\mathbb{Q}$-curva es una curva elíptica E/K t.q. ${}^{\sigma}E \sim E$ $\forall \sigma \in Gal(K/\mathbb{Q})$.

Similar para variedades de dimensión mayor, L-curva.

¿Por qué $\mathbb{Q}$?

<u>Teo</u> (Ribet): si E/k es una $\mathbb{Q}$-curva, sin CM, entonces existe χ caracter tal que $\rho_{E,p} \otimes \chi$ desciende a una rep.

$$\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_p).$$

En particular, $\rho_E \sim \rho_f \otimes \chi \Rightarrow$ modular, se extiende forma holo. y satisface e.f.

<u>Idea</u>: $\phi_\sigma : {}^\sigma E \to E$ isogenia.

$$c(\sigma,\tau) \in H^2(Gal(k/\mathbb{Q}), \mathbb{Q}^\times)$$

$$c(\sigma,\tau) = \phi_\sigma \, {}^\sigma\phi_\tau \cdot \underbrace{\phi_{\sigma\tau}^{-1}}_{\frac{\hat{\phi}_{\sigma\tau}}{\text{grado}}} \quad \text{en } \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

Por un teo de Tate, $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}^\times) = 0$. (acción trivial)

Inf(c) es trivial, $\exists\, d : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ tal que

$$c(\sigma,\tau) = \frac{d(\sigma)\,d(\tau)}{d(\sigma\tau)}. \qquad E = \mathbb{Q}(d(\sigma)) \,\big|\, \mathbb{Q} \text{ finita y abeliana.}$$

$\operatorname{Res}_{E.k/\mathbb{Q}} E$ contiene una var. ab. de tipo $GL_2/\mathbb{Q}$.

$$\prod_{\chi} \left(\operatorname{Res}_{k/\mathbb{Q}} E^{\chi}\right)$$

<u>Problema</u>: ¿E quién es? ¿control en χ y en la f sobre $\mathbb{Q}$?

<u>Ejemplo 4</u>: $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $E: y^2 = x^3 + 4x^2 + 2(1+\sqrt{-3})x$, $P = (0,0)$, orden 2

$$\bar{E} \sim E \otimes \chi_{-2} \quad (a_{\mathfrak{P}} = a_{\bar{\mathfrak{P}}}\, \chi(p) \text{ si } p.\mathcal{O}_k = \mathfrak{P}.\bar{\mathfrak{P}})$$

Luego E es una $\mathbb{Q}$-curva sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-2})$.

Su cociclo está dado por la tabla...

El cociclo

- Sea $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-d}, \sqrt{-2})$ y $\{\sigma_d, \sigma_2\}$ generadores con

$$\sigma_3(\sqrt{-3}) = -\sqrt{-3}, \quad \sigma_3(\sqrt{-2}) = \sqrt{-2}$$

$$\sigma_2(\sqrt{-3}) = \sqrt{-3}, \quad \sigma_2(\sqrt{-2}) = -\sqrt{-2}$$

- El cociclo está dado por

$c(\tau,\tau')$	1	σ_2	σ_3	$\sigma_2\sigma_3$
1	1	1	1	1
σ_2	1	1	-1	-1
σ_3	1	1	-2	-2
$\sigma_2\sigma_3$	1	1	2	2

Si podemos hallar $\chi : G_K \to \bar{\mathbb{Q}}^\times$ finito (de Hecke)

t.q. $\rho_{E,p} \otimes \chi \simeq \rho_{E^\tau,p} \otimes \chi^\tau$ ganamos, por la Prop,

donde $\chi^\tau(\sigma) = \chi(\tau\sigma\tau^{-1})$

Como $\rho_{E^\tau,p} = \rho_{E,p}\cdot\psi_{-2}$, queremos

$\rho_{E,p}\otimes\chi \simeq \rho_{E,p}\otimes\chi^\tau\cdot\psi_{-2}$, o sea $\boxed{\chi = \chi^\tau\cdot\psi_{-2}}$

¡Independiente de E! Además, $\chi^2 \leftrightarrow \varepsilon$ Nebentypus.

<u>Defino</u>: $\varepsilon_2 : (\mathbb{Z}/4)^\times \to \bar{\mathbb{Q}}^\times$, $-1 \to -1$ | $\varepsilon_3 : (\mathbb{Z}/3)^\times \to \bar{\mathbb{Q}}^\times$, $-1 \to -1$ | $\varepsilon_\infty : \mathbb{R}^\times \to \bar{\mathbb{Q}}^\times$, $x \to 1$

$\rightsquigarrow \varepsilon : \mathbb{I}_\mathbb{Q} \to \bar{\mathbb{Q}}^\times$ $\left(\mathbb{I}_\mathbb{Q} = \left(\left(\prod_p \mathbb{Z}_p^\times\right)\times\mathbb{R}^\times\right)\times\mathbb{Q}^\times \right)$

$\chi : \mathbb{I}_K \to \bar{\mathbb{Q}}^\times$ carácter de Hecke.

$\chi_\infty = 1$ | $\chi_2 : (\mathcal{O}/2^3)^\times \to \bar{\mathbb{Q}}^\times$

$$\left\langle \tfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \sqrt{-3},\ 5+4\sqrt{-3},\ -1 \right\rangle \quad\mapsto\quad 1,\ i,\ 1,\ 1$$

$\mathbb{I}_K$, pues $Cl(K)=1$

Luego $\chi = \prod \chi_p$ en $\mathcal{O}_K^\times$ es trivial $\rightsquigarrow \chi : \left(\prod_p \mathcal{O}_p^\times \times \mathbb{C}^\times\right)\times K^\times$ trivial

<u>Teo</u> (P. Villagra): $\cdot\ \chi^\tau = \chi\cdot\psi_{-2}$

$\cdot\ \chi^2 = \varepsilon$.

Luego, $E\otimes\chi$ se extiende con Nebentypus ε a $\mathbb{Q}$ y nivel $2^6\cdot 3$.

f 192.2.c.b, cpo coef es $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& M \arrow[d, dash] & \mathbb{Q} \arrow[u, dash, "4"'] \\
& \mathbb{Q}(\sqrt{-2},\sqrt{-3}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Relación con Ribet: χ $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq D_4$.

- El grupo $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq D_4 = \langle \sigma, \tau \ : \ \sigma^4 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^3\tau \rangle$.
- El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ coresponde al fijo por σ (orden 4).
- Los elementos σ y τ se restringen a σ_2 y σ_3 respectivamente.

g	1	σ	σ^2	σ^3	τ	$\sigma\tau$	$\sigma^2\tau$	$\sigma^3\tau$
$\alpha(g)$	1	$\sqrt{-1}$	-1	$-\sqrt{-1}$	$\sqrt{-2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{-2}$	$-\sqrt{2}$