Geometría y Álgebra Lineal 2 - 2025

Primer Parcial

Jueves 4 de setiembre de 2025

Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1. Sea $T : V \to V$ un operador lineal en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n.

a. Definir valor y vector propio de T.

Un vector propio asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ es un $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$.

Ver Definición 27 (p. 33)

b. Probar que T es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por vectores propios.

($\rightarrow$) por definición, $\exists\, B$ base de V tal que ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
$\{v_1, \dots, v_n\}$

Luego $Tv_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Tv_n = \lambda_n v_n \Rightarrow B$ es base de vep.

($\leftarrow$) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de vep. Luego $Tv_i = \lambda_i v_i$

$\Rightarrow {}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, es decir que T diagonaliza

Ver Teorema 50 (p. 43)

c. Definir multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio λ. ¿Qué relación tienen?

$m_a(\lambda) =$ multiplicidad de λ como raíz de χ_T

$m_g(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda)$

$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

Ver Definición 60 y Observación 61

Ejercicio 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (3x - 4y, -y, -x + 4y + 2z)$.

a. Escribir la matriz asociada a T en la base canónica.

$T(1,0,0) = (3,0,-1)$
$T(0,1,0) = (-4,-1,4)$
$T(0,0,1) = (0,0,2)$

$${}_E(T)_E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Calcular el polinomio característico de T.

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

c. ¿Es T diagonalizable? En caso que lo sea, encontrar su forma diagonal y la base correspondiente.

valores propios $\lambda = -1, 2, 3$ distintos y reales

$\rightsquigarrow$ T es diagonalizable (ver Corolario 5.4)

$$S_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \langle (1,1,-1) \rangle$$

$$S_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$S_3 = \ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,-1) \rangle$$

$$B = \{(1,1,-1), (0,0,1), (1,0,-1)\}$$

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Dado $a \in \mathbb{R}$, consideramos el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Determinar los valores de a para los cuales T es diagonalizable.

$$\chi_T = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & a \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & a \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[(5-\lambda)(1-\lambda) - 4a\right] = (3-\lambda)\left[\lambda^2 - 6\lambda + 5 - 4a\right]$$

$\hookrightarrow \lambda = 3$ $\qquad$ $\hookrightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{4a+4}$

$a > -1 \rightarrow$ tres vap reales $\neq$ $\rightarrow$ diagonaliza

$a < -1 \rightarrow$ vap no reales $\rightarrow$ no diagonaliza

$a = -1$ vap 3

No diagonaliza

b. Elegir un valor de a para el que T tenga algun valor propio con multiplicidad algebraica ≥ 2. Para el valor de a elegido, hallar la matriz de Jordan y una base de Jordan.

$a = -1 \rightsquigarrow m_a(3) = 3$

$$S_3 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1,0,2) \rangle$$

$m_g(3) = 1 \rightsquigarrow J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$v_1 = (1,0,0)$

$v_2 = (T-3)v_1 = (2,0,4)$

$v_3 = (T-3)v_2 = (0,0,0)$ $\times$ no sirve

$v_1 = (0,1,0)$

$v_2 = (T-3)v_1 = (1,0,0)$

$v_3 = (T-3)v_2 = (2,0,4)$

$\rightsquigarrow B = \{(0,1,0), (1,0,0), (2,0,4)\}$