Soluciones de la VIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2005

Problema 1 (4 puntos)

Sean $P(x,y) = (x^2y^3, x^3y^5)$, $P^1 = P$ y $P^{n+1} = P \circ P^n$. Sea $p_n(x)$ la primera coordenada de $P^n(x,x)$ y sea $f(n)$ el grado de p_n. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} (f(n))^{1/n}.$$

Solución:

Afirmamos que $P^n(x,y) = (x^{a_n}y^{b_n}, x^{c_n}y^{d_n})$, donde las sucesiones $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ satisfacen $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = 3$, $d_1 = 5$ y, para todo $n \geq 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3c_n$, $b_{n+1} = 2b_n + 3d_n$, $c_{n+1} = 3a_n + 5c_n$ e $d_{n+1} = 3b_n + 5d_n$. De hecho, esto sigue por inducción de $P^{n+1}(x,y) = P(P^n(x,y)) = P(x^{a_n}y^{b_n}, x^{c_n}y^{d_n}) = ((x^{a_n}y^{b_n})^2(x^{c_n}y^{d_n})^3,$ $(x^{a_n}y^{b_n})^3(x^{c_n}y^{d_n})^5) = (x^{2a_n+3c_n}y^{2b_n+3d_n}, x^{3a_n+5c_n}y^{3b_n+5d_n})$.

De ahí sigue que

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[2 pontos]

La primera coordenada de $P^n(x,x)$ es $x^{a_n+b_n}$. Los autovalores de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ son las raíces de $x^2 - 7x + 1 = 0$, las cuales son $\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$, de donde, para todo n, $a_n + b_n$ se escribe como $A\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para ciertas constantes A y B. Considerando los casos $n = 0$ y $n = 1$, obtenemos el sistema $A + B = 1$, $A\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = 5$, de donde $A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ y $B = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. En particular, como $A > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} (f(n))^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)^{1/n} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

[+ 2 pontos]

Nota: De hecho, $f(n) = a_n + b_n = F_{4n+1}$, donde F_k es el k-ésimo término de la sucesión de Fibonacci dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Problema 2 (5 puntos)
Considere matrices reales cuadradas A, B, C de orden n tales que $A^3 = -I$, $BA^2 + BA = C^6 + C + I$ y C es simétrica. Determine si es posible que n sea igual a 2005.

Solución:

Los autovalores λ de A deben satisfacer $\lambda^3 = -1$. Por otro lado, afirmamos que -1 no puede ser autovalor. De hecho, suponga por absurdo $Av = -v$. Tenemos $(BA^2 + BA)v = Bv - Bv = 0$ de donde $C^6 + C + I$ tiene autovalor 0. Por otro lado, como C es simétrica sus autovalores μ son todos reales y si μ es real entonces $\mu^6 + \mu + 1 > 0$, contradicción.

Así los únicos autovalores de A son los números complejos $(1 \pm \sqrt{-3})/2$: como las multiplicidades deben ser iguales, sigue que n es par.

Criterio:

Observar que los autovalores de A son -1 o $(1 \pm \sqrt{-3})/2$: *1 punto*

Observar que $C^6 + C + I$ tiene autovalores reales positivos: *1 punto*

Solución completa: *5 puntos*

Problema 3 (5 puntos)
Considere la sucesión definida recursivamente por $(x_1, y_1) = (0, 0)$,

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) x_n - \frac{1}{n} y_n + \frac{4}{n}, \left(1 - \frac{1}{n}\right) y_n - \frac{1}{n} x_n + \frac{3}{n}\right).$$

Calcule $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$.

Solución:

Podemos escribir la recursión como

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + \frac{1}{n}(4 - 2x_n - y_n, 3 - x_n - y_n).$$

Sea $Q = (a, b)$ el punto tal que $2a + b = 4$ y $a + b = 3$, es decir, $Q = (1, 2)$. Vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = Q$.

[2 pontos]

Escribiendo $x_n = 1 + r_n$, $y_n = 2 + s_n$, la recursión se transforma en

$$\begin{aligned}(r_{n+1}, s_{n+1}) &= (r_n, s_n) + \frac{1}{n}(-2r_n - s_n, -r_n - s_n) \\ &= \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) r_n - \frac{1}{n} s_n, -\frac{1}{n} r_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) s_n\right).\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}|(r_{n+1}, s_{n+1})|^2 &= \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) r_n - \frac{1}{n} s_n\right)^2 + \left(-\frac{1}{n} r_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) s_n\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}\right) r_n^2 - \frac{2}{n}\left(2 - \frac{3}{n}\right) r_n s_n + \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right) s_n^2\end{aligned}$$

y, como $-2r_n s_n \le \frac{3}{2} r_n^2 + \frac{2}{3} s_n^2$,

$$\begin{aligned}|(r_{n+1}, s_{n+1})|^2 &\le \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) r_n^2 + \left(1 - \frac{2}{3n}\right) s_n^2 \le \left(1 - \frac{2}{3n}\right)(r_n^2 + s_n^2) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3n}\right) |(r_n, s_n)|^2, \quad \text{para todo } n \ge 2.\end{aligned}$$

Como $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right) = 0$, sigue que $\lim_{n\to\infty}(r_n, s_n) = 0$, de donde

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = Q = (1, 2).$$

[+ 3 pontos]

Problema 4 (5 puntos)

Una tangente variable t a la circunferencia $\mathcal{C}_1$, de radio r_1, corta la circunferencia $\mathcal{C}_2$, de radio r_2, en los puntos A y B. Las tangentes a $\mathcal{C}_2$ en A y B se cortan en el punto P. Determine, en función de r_1 y r_2, la distancia entre los centros de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ para la cual el lugar geométrico de P al variar t está contenido en una hipérbola equilátera.

Obs: Una hipérbola es equilátera si sus asíntotas son perpendiculares.

Solución:

P es el polo de t en relación a $\mathcal{C}_2$. Considerando $\mathbb{R}^2$ contenido en el plano $\mathbb{P}^2$ de la forma usual, como la polaridad definida por $\mathcal{C}_2$ es una transformación proyectiva del espacio dual (formado por las rectas de $\mathbb{P}^2$) en $\mathbb{P}^2$ y t percurre una cónica no degenerada en el espacio dual, tenemos que P necesariamente percurrirá una cónica no degenerada en $\mathbb{P}^2$. Esta cónica será una hipérbola quando contenga dos puntos distintos en la recta del infinito. Tal hipérbola será equilátera cuando sus dos puntos del infinito correspondan a haces de rectas perpendiculares en $\mathbb{R}^2$. El punto P pertenece a la recta del infinito cuando t pasa por el centro de $\mathcal{C}_2$, en cuyo caso P corresponde al haz de rectas perpendiculares a t. Así, P percurrirá una hipérbola equilátera cuando haya dos rectas perpendiculares pasando por el centro de $\mathcal{C}_2$ y tangentes a $\mathcal{C}_1$. Esto ocurre si, y solamente si,

$$d = \sqrt{2}r_1$$

.

Solución alternativa:

Considere los puntos A y B en C_2, y el punto P, intersección entre las tangentes a C_2 en A y B, como en el enunciado. Sean M el punto medio de AB y O el centro de C_2. Tenemos entonces que el triángulo OAP es rectángulo en A, y AM es su altura en relación a la hipotenusa OP. Así, $OM \cdot OP = OA^2 = r_2^2$.

Suponiendo sin pérdida de generalidad que el centro de C_1 es $(0,0)$ y el centro de C_2 es $(d,0)$, si t es tangente a C_1 en $r_1(c,s)$, $c = \cos b$,$s = \operatorname{sen} b$, tenemos que la ecuación de t es $cx + sy = r_1$, mientras la ecuación de C_2 es $(x-d)^2 + y^2 = r_2^2$. Si t corta C_2 en dos puntos, las abscisas de estos puntos son las raíces de $s^2(x-d)^2 + (r_1 - cx)^2 = r_2^2 s^2$, o sea, de $x^2 - 2(ds^2 + r_1 c)x + (s^2(d^2 - r_2^2) + r_1^2) = 0$. Así, la abscisa de M es la media aritmética de las dos raíces de esta ecuación, que é $ds^2 + r_1 c$. De modo análogo sigue que la ordenada de M es $s(r_1 - dc)$. Así (como $ds^2 + r_1 c - d = r_1 c - dc^2$), el vector OM es igual a $M - O = M - (d,0) = (r_1 - dc)(c,s)$. De ahí sigue que el segmento OM

mide $|r_1 - dc|$ y, de $OM \cdot OP = (r_2)^2$, obtenemos $P = (d, 0) + r_2^2(c, s)/(r_1 - dc)$. Cuando b varia, haciendo $x = d + r_2^2 c/(r_1 - dc)$ y $y = r_2^2 s/(r_1 - dc)$, tenemos $d(x - d) + r_2^2 = r_2^2 r_1/(r_1 - dc)$, de donde sigue que (x, y) satisface la ecuación $(x - d)^2 + y^2 = r_2^4/(r_1 - dc)^2 = (d(x - d) + r_2^2)^2/(r_1)^2$. Esto da la ecuación de una cónica cuya parte de segundo grado es $(1 - (d/r_1)^2)x^2 + y^2$, y esa cónica es una hipérbola equilátera si y sólo si $1 - (d/r_1)^2 = -1$, i.e., si y sólo si $d = \sqrt{2}r_1$.

Criterio:

Probar que el L.G. de P está contenido en una cónica: *2 pontos*

Encontrar $d = \sqrt{2}r_1$: *+ 1 ponto*

Probar que el L.G. de P está contenido en una hipérbola equilátera si, y solamente si, $d = \sqrt{2}r_1$: *+ 2 pontos*

Observación:

Muchas otras soluciones analíticas son igualmente posibles. Ningún punto debe ser dado si el alumno, aunque escriba ecuaciones correctas, no consiguió aislar la equación del L.G. de P o no logró simplificarla correctamente obteniendo la ecuación de una cónica. Soluciones correctas salvo errores de cuenta pierden 1 punto.

Problema 5 (6 puntos)

Arnaldo y Bernaldo disputan un juego en que cada uno en su vez dice un número natural y gana aquel que diga 0. A cada jugada excepto la primera, las jugadas válidas son determinadas a partir de la jugada anterior n de la siguiente forma: escriba

$$n = \sum_{m \in O_n} 2^m;$$

las jugadas válidas son los elementos m de O_n. Así, por ejemplo, después de Arnaldo decir $42 = 2^5 + 2^3 + 2^1$, Bernaldo debe responder con 5, 3 ó 1.

Definimos conjuntos $A, B \subset \mathbb{N}$ de la siguiente forma. Tenemos $n \in A$ si e solo si Arnaldo, diciendo n en la primera jogada, tiene una estrategia que garantiza su victoria; analogamente, tenemos $n \in B$ si y sólo si Bernaldo tiene una estrategia que garantiza su victoria caso Arnaldo diga n en la primera jugada. Así,

$$A = \{0, 2, 8, 10, \ldots\}, \quad B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \ldots\}.$$

Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|$. Así, por ejemplo, $f(8) = 2$ y $f(11) = 4$. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n}.$$

Solución:

Sea n un entero positivo. Si $O_n \cap A \neq \emptyset$ entonces $n \in B$, o sea, Bernaldo tiene una estrategia para vencer un juego en que Arnaldo comienza diciendo n: basta responder con $m \in O_n \cap A$ y a partir de ahí copiar la estrategia que seria de Arnaldo. Por otro lado, si $O_n \cap A = \emptyset$ entonces $n \in A$, o sea, Bernaldo no tiene ninguna buena respuesta: de hecho, para cualquiera $m \in O_n$ tenemos $m \in B$ de donde ahora es Arnaldo que puede copiar la estrategia que seria de Bernaldo. Resumiendo,

$$n \in A \iff O_n \subset B. \tag{5.1}$$

Suponga $f(n) = c = |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|$. Así $|B \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}| = n - c$ y hay por lo tanto 2^{n-c} naturales m en el conjunto $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ para los cuales $O_m \subset B$. O sea,

$$f(2^n) = 2^{n-f(n)}. \tag{5.2}$$

Claramente todos los elementos de A son pares de donde $f(n) \leq (n+1)/2$. Así $f(2^n) \geq 2^{(n-1)/2} = \sqrt{2^n}/\sqrt{2}$. Si $2^m \leq n < 2^{m+1}$ tenemos

$$f(n) \geq f(2^m) = \frac{\sqrt{2^m}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}. \tag{5.3}$$

Así $f(2^n) \leq 2^{n-\frac{\sqrt{n}}{2}}$ y por lo tanto si $2^{m-1} < n \leq 2^m$ tenemos

$$f(n) \leq f(2^m) \leq 2^{m-\frac{\sqrt{m}}{2}} \leq n\ 2^{1-\frac{\sqrt{m}}{2}} \tag{5.4}$$

de donde, como $\log n \leq m \log 2$,

$$\frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n} \leq 2(\log 2)^{2005} \frac{m^{2005}}{2^{\frac{\sqrt{m}}{2}}}$$

o, tomando $l = \sqrt{m}$,

$$\frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n} \leq C \frac{l^{4010}}{(\sqrt{2})^l}$$

para una constante positiva (y irrelevante) C. Como claramente tenemos

$$\lim_{l\to\infty} \frac{l^{4010}}{(\sqrt{2})^l} = 0$$

tenemos tanbién

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n} = 0.$$

Criterio:

Obtener una caracterización recursiva de A y B (como en 5.1): *1 punto.*

Obtener la identidad 5.2 o equivalente: *+1 ponto.*

Obtener la estimativa 5.3 o equivalente: *+1 ponto.*

Obtener la estimativa 5.4 o equivalente: *+1 ponto.*

Solución completa: *6 puntos*

Problema 6 (6 puntos)

Decimos que una función suave $f : I \to \mathbb{R}$ es *totalmente convexa* si $(-1)^k f^{(k)}(t) > 0$ para todo $t \in I$ y para todo entero $k > 0$ (aqui I es un intervalo abierto).

Pruebe que toda función totalmente convexa $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es real analítica.

Obs: Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es suave si para todo entero positivo k la derivada de k-ésimo orden $f^{(k)}$ está definida y es contínua en $\mathbb{R}$. Una función suave $f : I \to \mathbb{R}$ es real analítica si para todo $t \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo número real h con $|h| < \epsilon$ la série de Taylor

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} h^k$$

converge y vale $f(t + h)$.

Solución:

Si $x > 0$ y $0 < h < x$, entonces, por la fórmula de Taylor con resto de Lagrange,

$$f(x-h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k + \frac{f^{(n+1)}(x-\theta h)(-h)^{n+1}}{(n+1)!},$$

para algún $\theta = \theta(x, h) \in (0, 1)$. La hipótesis $(-1)^k f^{(k)}(t) > 0$, para todo $t \in (0, +\infty)$ garantiza que $f^{(k)}(x)(-h)^k > 0$, $\forall\, k \leq n$, y $f^{(n+1)}(x - \theta h)(-h)^{n+1} > 0$. De ahí sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{k!}(-h)^k \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k < f(x-h) - f(x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

y, en particular,

$$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \cdot |h|^k < f(x-h) - f(x), \quad \forall\, x \in (0, +\infty), \quad h \in (0, x) \text{ y } k \in \mathbb{N}.$$

[3 puntos]

Si $x \in (0, +\infty)$, y $|h| < x/3$, la fórmula de Taylor con resto de Lagrange nos dá

$$\left| f(x+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot h^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h) \cdot h^{n+1}}{(n+1)!} \right|,$$

para algún $\theta \in (0, 1)$, pero, como los signos de $f^{(n+1)}$ y $f^{(n+2)}$ son opuestos, $|f^{(n+1)}(y)|$ es decreciente en $(0, +\infty)$, de donde

$$|f^{(n+1)}(x+\theta h)| \leq |f^{(n+1)}(x - |h|)| \leq |f^{(n+1)}(2x/3)|.$$

Además,

$$\frac{|f^{(n+1)}(2x/3)| \cdot |\frac{x}{3}|^{n+1}}{(n+1)!} < f(\frac{x}{3}) - f(\frac{2x}{3}),$$

de donde

$$\left| f(x+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x) \cdot h^k}{k!} \right| < \left(f(\frac{x}{3}) - f(\frac{2x}{3}) \right) \cdot \left(\frac{3|h|}{x} \right)^{n+1},$$

que tiende a 0 cuando n tiende a infinito, pues $|h| < \frac{x}{3}$. Así, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x) \cdot h^k}{k!}$ converge y vale $f(x+h)$, lo que prueba el resultado.

[+3 puntos]

Solución alternativa:

Como arriba, por la fórmula de Taylor con resto de Lagrange (o resto integral), si $0 < h < x$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (-h)^k \right| < f(x-h) - f(x)$$

de donde para todo $x > 0$ la série de Taylor tiene radio de convergencia $r_x \geq x$.

[2 pontos]

Para todo $x > 0$, $|h| < x$, defina

$$g_x(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k, \quad g_{x,n}(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k;$$

note que g_x es holomorfa en la bola de centro x y radio x en el plano complejo. Nuevamente por una de las fórmulas para el resto de la aproximación de Taylor tenemos, si $0 < h < x$,

$$g_{x,2n+1}(x+h) < f(x+h) < g_{x,2n+2}(x+h)$$

y, tomando el límite cuando n tiende a infinito, concluimos que $g_x(z) = f(z)$ para $x < z < 2x$.

[+2 pontos]

Así, si $0 < x_1 < x_2 < 2x_1$, las funciones g_{x_1} y g_{x_2} coinciden con f y entre sí para todo z real en el intervalo $(x_2, 2x_1)$ y por lo tanto g_{x_1} es la restricción de g_{x_2} a una bola menor. Encadenando varios x_i tenemos la misma conclusión para qualesquiera $0 < x_1 < x_2$ de donde f puede ser estendida a una función holomorfa en el semiplano derecho $\{a + bi; a > 0\} \subset \mathbb{C}$.

[+2 pontos]

Problema 7 (7 puntos)

Demuestre que para enteros n y p, $0 < n \leq p$ cualesquiera, todas las raíces del polinomio abajo son reales:

$$P_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j} \binom{p}{n-j} x^j.$$

Solución:

Considere $q(t) = t^p(1-t)^p$. Observe que todas las raíces de q son reales y por lo tanto todas las raíces de $q^{(n)}$ son reales: 0 y 1 son raíces de multiplicidad $p-n$ y hay n otras raíces en el intervalo abierto $(0,1)$: $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$. Derivando,

$$\begin{aligned}
q^{(n)}(t) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{p!}{(p-j)!}\, t^{p-j}\, \frac{p!}{(p-n+j)!}\, (-1)^{n-j}\, (1-t)^{p-n+j} \\
&= (-1)^n\, t^p\, (1-t)^{p-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!p!p!}{j!(n-j)!(p-j)!(p-n+j)!} ((t-1)/t)^j \\
&= (-1)^n\, t^p\, (1-t)^{p-n}\, n! \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j} \binom{p}{n-j} ((t-1)/t)^j \\
&= (-1)^n\, t^p\, (1-t)^{p-n}\, n!\, P_{n,p}((t-1)/t)
\end{aligned}$$

de donde las n raíces de $P_{n,p}$ son los números reales negativos $x_i = (t_i - 1)/t_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Criterio:

Contar las raíces, observar que si las raíces son reales entonces ellas son negativas o resolver el problema para valores particulares de n o p: *0 puntos.*

Manipulaciones algebraicas o Interpretaciones combinatorias para los coeficientes de $P_{n,p}$: *0 puntos.*

Resolver correctamente el caso $p = n$: *2 pontos.*

Solución completa: *7 puntos*