

Soluciones de la VII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria
2004

1) Sea p un polinomio de grado menor o igual a 4 con $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = 1$ y tal que, para todo $x \in [-1, 1]$, $p(x) \leq 1$. Encuentre el mayor valor posible de

$$\int_{-1}^1 p(t) dt.$$

Solución:

Si $p(1) = p(-1) = 0$, $p(x)$ es un polinomio de la forma $p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$.

[1 punto]

Como $p(0) = 1$ y $p(x) \leq 1$ para todo $x \in [-1, 1]$, tenemos que 0 es punto de máximo local de $p(x)$, y luego $p'(0) = 0$. Así, como $p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$, debemos tener $c = -1$ y, como $p'(x) = 2x(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 1)(2ax + b)$, $0 = p'(0) = -b$, de donde $b = 0$.

[+ 1 punto]

Así, $p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 - 1)$, y, como 0 es punto de máximo local, debemos tener $p''(0) = -2(1 + a) \leq 0$, de donde $a \geq -1$. Así, $p(x) = (1 - x^2)(1 - ax^2) \leq (1 - x^2)(1 + x^2) = 1 - x^4$ para $-1 \leq x \leq 1$, y $p(x) = 1 - x^4$ satisface las condiciones del enunciado. Así, $\int_{-1}^1 p(t) dt \leq \int_{-1}^1 (1 - t^4) dt = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.

[+ 2 puntos]

2) Considere la matriz real cuadrada S de orden r y entradas

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n k^{i+j}.$$

Calcule $\det S$ (en función de r).

Solución:

Sea A la matriz con entradas $a_{ij} = j^i$.

Podemos escribir $S = AA^t$, de donde $\det S = (\det A)^2$.

Escriba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^n & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{(n-1)n} \end{pmatrix}}_V \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{pmatrix}}_D$$

donde $\det A = \det V \cdot \det D$.

Claramente $\det D = n!$

[2 puntos]

La matriz V es una matriz de Vandermonde:

$$\det V = \prod_{i \leq i < j \leq n} (j - i) = (n-1)!(n-2)! \cdots 2! \cdot 1!$$

Así, $\det S = (1! \cdots 2! \cdots 3! \cdots (n-1)! \cdot n!)^2$.

Observar la relevancia de la matriz V y de su determinante:

[2 puntos]

Calcular $\det V$.

[2 puntos]

3) Sean N_1, N_2, N_3 matrices reales 2×2 tales que $N_1^2 = N_2^2 = N_3^2 = 0$.

Pruebe que si existen números reales x_1, x_2, x_3 no todos nulos con

$$x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$$

entonces existen índices $i \neq j$ y un número real r con $N_i = r N_j$.

Solución:

El caso $N_i = 0$ es trivial.

Claramente debemos tener $\text{tr } N_1 = \text{tr } N_2 = \text{tr } N_3 = 0$.

Escriba $N_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$

Tenemos $N_1^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1 c_1 & 0 \\ 0 & a_1^2 + b_1 c_1 \end{pmatrix}$

Así, $a_1^2 + b_1 c_1 = 0$. Análogamente, $a_2^2 + b_2 c_2 = a_3^2 + b_3 c_3 = 0$. (*)

[2 puntos]

1ª solución:

El conjunto de los puntos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tales que $a^2 + bc = 0$ es un cono circular recto en $\mathbb{R}^3$ pues $a^2 + bc = a^2 + \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Así todo plano pasando por la origen intersecta el cono en 0, 1 ó 2 rectas. Si existen x_1, x_2, x_3 no todos nulos con $x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$ entonces $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$ están en la intersección del cono con el plano $x_1 a + x_2 b + x_3 c = 0$, donde hay dos puntos colineales, como queríamos demostrar.

2ª solución (a partir de (*))

Se $c_i \neq 0$, podemos, multiplicando N_i por $\frac{1}{c_i}$, suponer $c_i = 1$. Tenemos así 3 casos a considerar:

$c_1 = c_2 = c_3 = 1$

Tenemos $b_i = -a_i^2$. Así los 3 puntos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ están sobre la parábola $b = -a^2$. Si $x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$ entonces los 3 puntos son colineales pero, estando sobre una parábola, esto significa que dos de ellos coinciden, como queríamos.

[+ 2 puntos]

$c_1 = c_2 = 1, c_3 = 0$

Podemos suponer $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, o sea, $a_3 = 0$, $b_3 = 1$, $c_3 = 0$.

Si $x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$ entonces $x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0$, de donde $a_2 = a_1$ y $N_2 = N_1$, como queríamos.

$c_2 = c_3 = 0$

En este caso podemos escribir $N_2 = r N_3$.

3ª solución (a partir de (*))

Como en la segunda solución dividimos en casos, ahora haciendo

$$\left(a = 1, b = -\frac{1}{c}\right) \text{ ou } \left(N = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ ou } \left(N = b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Los dos puntos con $a = 0$ tienen que ser tratados separadamente. Los puntos de la forma $a = 1$ forman una hipérbole, donde no existen 3 puntos colineales.

(+ 2 puntos por tratar el caso $a = 1$)

4) Sea $\{0, 1\}^n$ el conjunto de las sucesiones de n términos con valores 0 ó 1. Decimos que dos puntos de $\{0, 1\}^n$ son *vecinos* si difieren en una única coordenada.

Los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_k$ son disjuntos y su unión es $\{0, 1\}^n$. Sabemos que para cualesquiera $i \neq j$ existen $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$ tales que a_i e a_j son vecinos. Pruebe que

$$n \geq 2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1.$$

Solución:

Como $\{0, 1\}^n$ tiene 2^n elementos y $A_1, A_2, \dots, A_k$ son disjuntos, debe existir $j \leq k$ tal que A_j tiene a lo sumo $2^n/k$ elementos. [1 punto]

Como, para todo $i \leq k$ con $i \neq j$, existen $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$ tales que a_i y a_j son vecinos, y hay $k - 1$ posibles elecciones para $i \neq j$, debemos tener $k - 1 \leq n \cdot 2^n/k$,

pues hay como máximo $2^n/k$ elecciones para $a_j \in A_j$, y cada uno de estos a_j tiene n vecinos. Así, tenemos $k(k-1) \leq n \cdot 2^n$. [+3 puntos]

Como $f(n) = n \cdot 2^n$ es una función creciente, es suficiente mostrar que $f(2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) \leq k(k-1)$ para concluir el resultado, pero $f(2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) = (2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) 2^{2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1} = (2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) \cdot k^2 / (2 \log_2 k)$, de donde $f(2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) \leq k(k-1) \Leftrightarrow 1 - \frac{\log_2 \log_2 k + 1}{2 \log_2 k} \leq 1 - \frac{1}{k} \Leftrightarrow 2 \log_2 k \leq k(\log_2 \log_2 k + 1)$. Para $k = 2$ vale la igualdad, para $k \geq 4$ tenemos $k^2 \leq 2^k$, de donde $2 \log_2 k \leq k < k(\log_2 \log_2 k + 1)$, y para $k = 3$ $2 \log_2 3 \leq 3(\log_2 \log_2 3 + 1) \Leftrightarrow 9 \leq 8 \cdot (\log_2 3)^3$, pero $\log_2 3 \geq \frac{3}{2}$, de donde $8 \cdot (\log_2 3)^3 \geq 8 \cdot \frac{3}{2} = 12 > 9$. Así, el resultado vale para todo $k \geq 2$. [+2 puntos]

5) Sea $\mathfrak{T}_k \subset \mathbb{C}$ el conjunto de todas las raíces de polinomios mónicos de grado k y coeficientes enteros.

i) Muestre que $\mathfrak{T}_2 \cap \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ pero $\mathfrak{T}_2$ no es denso en $\mathbb{C}$.

ii) Determine si $\mathfrak{T}_3$ es denso en $\mathbb{C}$.

Obs: Un polinomio es mónico si su coeficiente de más alto grado es igual a 1. Un conjunto X es denso en $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si para todo $z \in \mathbb{R}$ (resp. $z \in \mathbb{C}$) y todo $\epsilon > 0$ existe $w \in X$ con $|z - w| < \epsilon$.

Solución:

a) Las raíces de $x^2 - ax + b = 0$ son dadas por $\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, y, si no son reales, su parte real es $\frac{a}{2}$, que es la mitad de un entero. Así, $\mathfrak{T}_2$ no es denso en $\mathbb{C}$, pues no hay, por ejemplo, ningún elemento de $\mathfrak{T}_2$ a una distancia menor que $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4} + i$. [1 punto]

Por otro lado, dado $x \in \mathbb{R}$, tenemos, para cada $k \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, $x = (x + k) - k = \sqrt{x^2 + 2kx + k^2} - k$, de donde $|(\sqrt{x^2 + 2kx + k^2} - k) - x| = \left| \sqrt{x^2 + 2kx + k^2} - \sqrt{x^2 + 2kx + k^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{[x^2 + 2kx + k^2] + \sqrt{x^2 + 2kx + k^2}}} \leq \frac{1}{x + k}$, que tiende a 0 cuando k tiende a infinito, lo que muestra que $\mathfrak{T}_2 \cap \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$, pues

$\sqrt{\lfloor x^2 + 2kx + k^2 \rfloor} - k =: y$ satisface la ecuación $(y + k)^2 = \lfloor x^2 + 2kx + k^2 \rfloor \in \mathbb{Z}$, y luego pertenece a $\mathfrak{T}_2$. [1 punto]

b) Las raíces x_1, x_2 y x_3 de $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ satisfacen

$$(*) \quad x_1 + x_2 + x_3 = a, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \quad x_1x_2x_3 = c.$$

[1 punto]

Vamos a probar que $\mathfrak{T}_3$ es denso en $\mathbb{C}$. Dado un número complejo $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, queremos mostrar que él puede ser aproximado por elementos de $\mathfrak{T}_3$ con error arbitrariamente pequeño. Suponemos sin pérdida de generalidad $\beta \neq 0$. Sea $R = \alpha^2 + \beta^2$. Para cada $a \in \mathbb{N}$ grande, la ecuación

$$P(x) := x^3 - ax^2 + (2\alpha(a - 2\alpha) + R)x - R(a - 2\alpha) = 0$$

tiene raíces $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ e $a - 2\alpha$, por (*). Vamos a mostrar que la ecuación

$$Q(x) := x^3 - ax^2 + \lfloor 2\alpha(a - 2\alpha) + R \rfloor x - \lfloor R(a - 2\alpha) \rfloor = 0$$

tiene raíces próximas a $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ e $a - 2\alpha$, si a es suficientemente grande.

[2 puntos, por considerar esas ecuaciones con a grande]

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tenemos, con $b = 2\alpha(a - 2\alpha) + R$,

$$\begin{aligned} P(a - 2\alpha + \varepsilon) &= P(a - 2\alpha + \varepsilon) - P(a - 2\alpha) = \\ &= 3\varepsilon(a - 2\alpha)^2 + 3\varepsilon^2(a - 2\alpha) + \varepsilon^3 - a(2\varepsilon(a - 2\alpha) + \varepsilon^2) + b\varepsilon = \\ &= \varepsilon(a - 2\alpha)^2 - 2\varepsilon(\alpha - \varepsilon)(a - 2\alpha) + (R\varepsilon - 2\alpha\varepsilon^2 + \varepsilon^3) = \varepsilon a^2 + O(a), \end{aligned}$$

mientras $|Q(a - 2\alpha + \varepsilon) - P(a - 2\alpha + \varepsilon)| \leq |a - 2\alpha + \varepsilon| + 1 = O(a)$. Así, dado $\varepsilon > 0$, $Q(a - 2\alpha + \varepsilon) = \varepsilon a^2 + O(a) > 0$ y $Q(a - 2\alpha - \varepsilon) = -\varepsilon a^2 + O(a) < 0$, si $a \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande, de donde $Q(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(a - 2\alpha - \varepsilon, a - 2\alpha + \varepsilon)$. En otras palabras, $Q(x)$ tiene una raíz $a - 2\tilde{\alpha}$, con

$\tilde{\alpha} = \alpha + o(1)$, donde utilizamos la notación $o(1)$ para representar términos que tienden a 0 cuando a crece. Las otras raíces de $Q(x)$, digamos y_1 e y_2 , satisfacen

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = a - (a - 2\tilde{\alpha}) = 2\tilde{\alpha} = 2\alpha + o(1) \\ y_1 \cdot y_2 = \lfloor R(a - 2\alpha) \rfloor / (a - 2\tilde{\alpha}) = R + o(1), \end{cases}$$

de donde y_1 e y_2 son iguales a $\alpha + \beta i + o(1)$ y $\alpha - \beta i - o(1)$, una vez que $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$ son raíces de la ecuación $x^2 - 2\alpha x + R = 0$, pues satisfacen $(\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\alpha$ e $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = R$. [+ 2 puntos]

6) Para cada entero positivo n , sea

$$X_n = \{-2n + 1, -2n + 3, \dots, -1, 1, \dots, 2n - 3, 2n - 1\}$$

el conjunto de los enteros impares de módulo menor que $2n$. Sea $P_n \subset [x]$ el conjunto de los polinomios p de grado menor que $2n$ tales que $|p(x)| \leq 1$ para todo $x \in X_n$. Sea $g(n) = \max_{p \in P_n} p(0)$ el mayor valor posible de $p(0)$ para $p \in P_n$. Pruebe que el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\ln(n)}$$

existe y calcule su valor.

Solución:

Dados los $2n$ valores $p(a)$, $a \in X_n$, el polinomio $p(x) \in P_n$ que asume los valores $p(a)$ para $a \in X_n$ es determinado (por interpolación de Lagrange) por la expresión

$$(*) \quad p(x) = \sum_{a \in X_n} p(a) \cdot \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left(\frac{x - b}{a - b} \right). \quad [1 \text{ punto}]$$

Así, si $|p(a)| \leq 1$ para todo $a \in X_n$, tenemos

$$p(0) \leq \sum_{a \in X_n} \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a - b} \right|,$$

valendo la igualdad si, para cada $a \in X_n$, escogemos en (*), para cada $a \in X_n$, $p(a) \in \{-1, 1\}$ con el mismo signo que $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left(\frac{-b}{a-b} \right)$. Por lo tanto, tenemos

$$g(n) = \sum_{a \in X_n} \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right|.$$

[+ 1 punto]

Queremos calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\ln(n)}$

Vamos entonces estimar los términos $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right|$, con $a \in X_n$. Tenemos $X_n = \{2j-1, 1-n \leq j \leq n\}$. Si $a = 2j-1 \in X_n$, $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right| = \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |b| / \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |a-b|$. Tenemos $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |b| = (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1))^2 / |2j-1| = \left(\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \right)^2 / |2j-1|$, y $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |a-b| = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2j+2n-2) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2(n-j) = 2^{2n-1} (n+j-1)! (n-j)!$. Así,

$$\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right| = \frac{(2n)! (n+j)(2n)!}{(n+j)! (n-j)! 2^{4n-1} \cdot n!^2 |2j-1|} = \frac{n+j}{2^{4n-1} |2j-1|} \cdot \binom{2n}{n+j} \binom{2n}{n},$$

y por lo tanto

$$g(n) = \sum_{1-n \leq j \leq n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n+j} \binom{2n}{n}.$$

Para estimar $g(n)$, notemos inicialmente que $\binom{2n}{n}$ es (por la fórmula de Stirling o por algún argumento equivalente) asintóticamente $\frac{(2n)!}{n!^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4n\pi}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi})^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.
[+ 1 punto]

Note ahora que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} &= \frac{n!^2}{(n+j)!(n-j)!} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+2} \cdot \dots \cdot \frac{n-j+1}{n+j} = \\ &= \prod_{r=1}^j \left(1 - \frac{2r-1}{n+r}\right) \leq \exp\left(-\sum_{r=1}^j \frac{2r-1}{n+r}\right). \end{aligned}$$

Si $j \geq \ln n \cdot \sqrt{n}$,

$$\sum_{r=1}^j \frac{2r-1}{n+r} \geq \frac{j^2}{n+j} \geq \frac{(\ln n \cdot \sqrt{n})^2}{n + \ln n \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{\ln^2 n}{2},$$

de donde

$$\prod_{r=1}^j \left(1 - \frac{2r-1}{n+r}\right) \leq \exp\left(-\frac{\ln^2 n}{2}\right) < \frac{1}{n}, \quad \text{para } n \text{ grande.}$$

Como $\binom{2n}{n+j} = \binom{2n}{n-j}$, si $j \leq -\ln n \cdot \sqrt{n}$ también tenemos $\binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} < \frac{1}{n}$, y luego $\binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} < \frac{1}{n}$ siempre que $|j| \geq \ln n \cdot \sqrt{n}$. [+ 1 punto]

Por otro lado, si $|j| \leq \sqrt{n}/\ln n$,

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} &= \prod_{r=1}^{|j|} \left(1 - \frac{2r-1}{n+r}\right) = \prod_{r=1}^{|j|} \left(1 + \frac{2r+1}{n-r+1}\right)^{-1} \geq \\ &\geq \exp\left(-\frac{j^2}{n-j+1}\right) \geq \exp\left(-\frac{2}{\ln^2 n}\right) \geq 1 - \frac{2}{\ln^2 n}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n}^2 \right) - g(n) \right| \leq \\
& \leq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{4n-1}} \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \left| \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} - \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n+j} \right| + \\
& + \sum_{\frac{\sqrt{n}}{\ln n} < |j| \leq \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} \binom{2n}{n+j} + \\
& + \sum_{n \geq |j| > \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} \binom{2n}{n+j} \leq \\
& \leq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{4n-1}} \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \left| \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} - \frac{n+j}{|2j-1|} \binom{2n}{n+j} \right| + \\
& + \frac{2n}{2^{4n-1}} \binom{2n}{n}^2 \sum_{\frac{\sqrt{n}}{\ln n} < |j| \leq \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{|2j-1|} + \frac{n}{2^{4n-1} \cdot \sqrt{n}} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Tenemos que $\sum_{\frac{\sqrt{n}}{\ln n} < |j| \leq \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{|2j-1|}$ es del orden de $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{n} \ln n}{\sqrt{n}/\ln n} \right) = \ln \ln n$

$= o(\ln n)$, e $\left| n \cdot \binom{2n}{n} - (n+j) \binom{2n}{n+j} \right| \leq |j| \cdot \binom{2n}{n+j} + \frac{2n}{\ln^2 n} \binom{2n}{n}$

$\leq \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n} + \frac{2n}{\ln^2 n} \right) \binom{2n}{n} = o \left(n \binom{2n}{n} \right)$, para $|j| \leq \sqrt{n}/\ln n$, de donde

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{4n-1}} \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \left| \frac{n}{|2j-1|} \binom{2n}{n} - \frac{n+j}{|2j-1|} \binom{2n}{n+j} \right| = o \left(\frac{n \cdot \binom{2n}{n}^2}{2^{4n-1}} \cdot \ln n \right),$$

pues $\sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{|2j-1|} \leq \ln n$. Por lo tanto, mostramos que

$$\left| \left(\sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n}^2 \right) - g(n) \right| = o \left(n \cdot \binom{2n}{n}^2 2^{4n-1} \cdot \ln n \right),$$

pero $\binom{2n}{n}^2$ es asintóticamente $\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\right)^2 = \frac{2^{4n}}{n\pi}$, de donde $o\left(n \cdot \binom{2n}{n}^2 2^{4n-1} \cdot \ln n\right) = o(\ln n)$.

Por otro lado,

$$\sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n}^2 = \frac{n}{2^{4n-1}} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{|2j-1|}$$

es asintóticamente $\frac{n}{2^{4n-1}} \cdot \frac{2^{4n}}{n\pi} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)$, que es asintóticamente $\frac{\ln n}{\pi}$, o sea,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\ln n} = \frac{1}{\pi}. \quad [+ 3 \text{ puntos}]$$

7) Sea $\mathcal{S} = \{-1, 1\}$ el conjunto de todas las sucesiones con valores 1 y -1 . Para $p, q \in \mathcal{S}$, definimos

$$p \perp q \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$

Muestre que existe $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que si $p \neq q$ entonces $f(p) \perp f(q)$.

Solución:

Sea $\delta(j, i) = \left\lfloor \frac{j}{2^i} \right\rfloor \bmod 2$. Note que $\delta(j, i) = 0$ se $i > \log_2 j$. Defina

$$(f(p))(k) = \prod_{0 \leq i \leq \log_2 k} (p(i))^{\delta(k, i)}.$$

Sean $p, q \in \mathcal{S}$, $p \neq q$. Sea a el menor entero tal que $p(a) \neq q(a)$. Afirmamos que, para todo entero positivo b ,

$$\sum_{2^{a+1} \cdot b \leq k < 2^{a+1}(b+1)} (f(p))(k) (f(q))(k) \stackrel{(*)}{=} 0.$$

De hecho, vamos a probar que si $2^{a+1}b \leq j < 2^{a+1}b + 2^a$ entonces

$$(f(p))(j) (f(q))(j) \stackrel{(**)}{=} -(f(p))(j + 2^a) \cdot (f(q))(j + 2^a).$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned}(f(p))(j) &= \prod_i (p(i))^{\delta(j,i)} \\ (f(p))(j + 2^a) &= \prod_i (p(i))^{\delta(j+2^a,i)} \\ &= p(a) \cdot (f(p))(j).\end{aligned}$$

Analogamente

$$(f(q))(j + 2^a) = q(a) \cdot (f(q))(j).$$

Como $p(a)q(a) = -1$, tenemos la igualdad (**), de donde (*). De (*), tenemos

$$\sum_{k < n} (f(p))(k)(f(q))(k) = \sum_{2^{a+1} \left\lfloor \frac{n}{2^{a+1}} \right\rfloor \leq k < n} (f(p))(k)(f(q))(k) \leq 2^{a+1}$$

de donde

$$\sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} \leq \frac{2^{a+1}}{n}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$