

VII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria

6 de noviembre de 2004

Problema 1 (4 puntos)

Sea p un polinomio de grado menor o igual a 4 con $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = 1$ y tal que, para todo $x \in [-1, 1]$, $p(x) \leq 1$. Encuentre el mayor valor posible de

$$\int_{-1}^1 p(t) dt.$$

Problema 2 (5 puntos)

Considere la matriz real cuadrada S de orden n y entradas

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n k^{i+j}.$$

Calcule $\det S$ (en función de n).

Problema 3 (5 puntos)

Sean N_1, N_2, N_3 matrices reales 2×2 tales que $N_1^2 = N_2^2 = N_3^2 = 0$. Pruebe que si existen números reales x_1, x_2, x_3 no todos nulos con

$$x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$$

entonces existen índices $i \neq j$ y un número real r con $N_i = r N_j$. [B

Problema 4 (6 puntos)

Sea $\{0, 1\}^n$ el conjunto de las sucesiones de n términos con valores 0 ó 1. Decimos que dos puntos de $\{0, 1\}^n$ son *vecinos* si difieren en una única coordenada.

Los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_k$ son disjuntos y su unión es $\{0, 1\}^n$. Sabemos que para cualesquiera $i \neq j$ existen $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$ tales que a_i e a_j son vecinos. Pruebe que

$$n \geq 2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1.$$

Problema 5 (7 puntos)

Sea $\mathcal{I}_k \subset \mathbb{C}$ el conjunto de todas las raíces de polinomios mónicos de grado k y coeficientes enteros.

(a) (2 puntos) Muestre que $\mathcal{I}_2 \cap \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ pero $\mathcal{I}_2$ no es denso en $\mathbb{C}$.

(b) (5 puntos) Determine si $\mathcal{I}_3$ es denso en $\mathbb{C}$.

Obs: Un polinomio es mónico si su coeficiente de más alto grado es igual a 1. Un conjunto X es denso en $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si para todo $z \in \mathbb{R}$ (resp. $z \in \mathbb{C}$) y todo $\epsilon > 0$ existe $w \in X$ con $|z - w| < \epsilon$.

Problema 6 (7 puntos)

Para cada entero positivo n , sea

$$X_n = \{-2n + 1, -2n + 3, \dots, -1, 1, \dots, 2n - 3, 2n - 1\}$$

el conjunto de los enteros impares de módulo menor que $2n$. Sea $P_n \subset \mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios p de grado menor que $2n$ tales que $|p(x)| \leq 1$ para todo $x \in X_n$. Sea $g(n) = \max_{p \in P_n} p(0)$ el mayor valor posible de $p(0)$ para $p \in P_n$. Pruebe que el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\ln(n)}$$

existe y calcule su valor.

Problema 7 (7 puntos)

Sea $\mathcal{S} = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones con valores 1 o -1 .

Para $p, q \in \mathcal{S}$, definimos

$$p \perp q \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$

Muestre que existe $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que si $p \neq q$ entonces $f(p) \perp f(q)$.