VI OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITARIA
8 DE NOVIEMBRE DE 2003

PROBLEMA 1. [5 puntos]
Sea $f_0(x) = \log x,$ el logaritmo natural de x.

Defina, para todo $n \geq 0,$ $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x f_n(t)dt.$

Pruebe que el límite abajo existe y está en el intervalo [-1,0):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} f_n(n).$$

PROBLEMA 2. [5 puntos]
Pruebe que si $p(x)$ es um polinomio con coeficientes enteros entonces existe n entero tal que $p(n)$ tiene más de 2003 factores primos distintos.

PROBLEMA 3. [5 puntos]
Vários niños están jugando al "teléfono inalámbrico". El niño C_0 susurra tres palabras al niño C_1, que susurra lo que escuchó al niño C_2 y así sucesivamente hasta que el mensaje llegue al niño C_n. Cada una de las tres palabras tiene exactamente una palabra "gemela" (por ejemplo, las palabras <u>ración</u> y <u>razón</u> son "gemelas" pues es muy fácil confundirlas).
Cada niño $(i+1)$ tiene probabilidad $1/2$ de oir correctamente lo que el niño i dijo, tiene $1/6$ de probabilidad de cambiar la primeira palabra dicha por el niño i por su "gemela", $1/6$ de probabilidad de cambiar la segunda palabra y $1/6$ de probabilidad de cambiar la tercera palabra (y por lo tanto nunca cambia más de uma palabra). Note que en un cambio el mensaje puede ser accidentalmente corregido.
Calcule la probabilidad de que el niño C_n escuche exactamente el mensaje original.

PROBLEMA 4. [5 puntos]
Una familia $A_1, A_2, ..., A_n$ de conjuntos es dicha (*a*, *b*) uniforme si $|A_i| = a$, para todo $i \in \{1,...,n\}$ y $|A_i \cap A_j| = b$ para cualquier $i \neq j,$ $i, j \in \{1,...,n\}$.
Pruebe que dados a, b existe $N_{a,b}$ tal que si $n > N_{a,b}$ e $A_1, A_2, ..., A_n$ es una familia (a,b) uniforme entonces $\left|\bigcap_{i=1}^n A_i\right| = b$.

PROBLEMA 5. [7 puntos]

Sea z una raíz de la ecuación $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$, donde $0 \le a_0, a_1, ..., a_{n-1} \le k$. Pruebe que:

i) Si $\operatorname{Re} z > 0$ entonces $|z| < 1 + \sqrt{k}$ (donde $\operatorname{Re} z$ es la parte real de z).

ii) $\operatorname{Re} z < 1 + \sqrt[3]{k}$.

PROBLEMA 6. [7 puntos]

Sean $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pruebe que $B^{\varepsilon_1} A^{s_1} B A^{s_2} B \ldots A^{s_n} B^{\varepsilon_2} \neq I$, para cualquier $n \ge 1$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 1,2$ y $s_i \in \{-1,1\}, 1 \le i \le n$.

PROBLEMA 7. [8 puntos]

Pruebe que $\tan(z) = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$, donde, para $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ y $\tan(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$.

SOLUCIONES

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 1:

Podemos ver que $f_1(x) = x(\log x - 1)$, $f_2(x) = (1/2)x^2(\log x - 3/2)$ y
$f_3(x) = (1/6)x^3(\log x - 11/6)$ **[Determinación de los f_1, f_2, y f_3 vale 1 punto]**

En general, podemos probar por inducción que:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(\log x - H_n) \qquad (1)$$

para todo entero $n \geq 0$, donde $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ es el así llamado n-ésimo *número harmónico.* De hecho, (1) vale para $n = 0$, y si ella es válida para $n \geq 0$, entonces

$$f_{n+1}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{(n+1)!} t^{n+1}(\log t - H_{n+1})\Big|_{\varepsilon}^{x} \right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}(\log x - H_{n+1}),$$

pues $(d/dt)(1/(n+1)!t^{n+1}(\log t - H_{n+1}) = (1/n!)t^n(\log t - H_n) = f_n(t)$.

Alternativamente, inspeccionando casos pequeños, vemos que

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(\log x - C_n) \qquad (2)$$

para alguna constante C_n que depende apenas de n . Observando que

$$f'_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}x^n\left(\log x - C_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right), \qquad (3)$$

tenemos que $C_{n+1} = C_n + 1/(n+1)$. Como $C_1 = 1$, tenemos que $C_n = H_n$.

[valor de la determinación de (1): 3 puntos; 2 puntos si mostrar que f_n se escribe como en (2), pero no conseguir determinar C_n.]

Tenemos así que

$$\frac{n!}{n^n} f_n(n) = \frac{n!}{n^n} \times \frac{n^n}{n!}(\log n - H_n) = \log n - H_n, \qquad (4)$$

e ahora basta probar que $\lim_{n\to\infty}(\log n - H_n)$ existe y que éste límite pertenece a [-1,0).

Tenemos $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \log n > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, pues $\log n = \int_1^n \frac{dt}{t}$.

Por lo tanto, para $n \geq 2$ $-1 < \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < 0$. Además de esto, $\log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ es una secuencia decreciente. Así, $\lim_{n\to\infty}(\log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}) \in [-1, 0)$. Como $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, sigue que

$$\lim_{n\to\infty}(\log n - H_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \in [-1, 0).$$

[Existencia y valor del límite: 2 puntos (1 punto para existencia y 1 punto por probar que el límite está en el intervalo dado en el enunciado).]

Obs: La verdad $\lim_{n\to\infty}(\log n - H_n) = -\gamma = -0,577\ldots$, donde γ es la constante de Euler.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2
Primera Solución
Suponga que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $f(n)$ nunca tenga más de 2003 factores primos distintos. Tome $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n_0)$ tenga la mayor cantidad de factores primos distintos, digamos j.
$f(n_0) = \pm p_1^{\alpha_1} \ldots p_j^{\alpha_j} = k$ **[1 punto]**
Podemos suponer $n_0 = 0$ (considerando $g(n) = f(n - n_0)$).
Así tendremos:
$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + k.$
Tomando $x = wk^2 \Rightarrow f(x) \equiv k (\operatorname{mod} k^2)$
$\Rightarrow f(x) = ak^2 + k = (ak+1)k$, para algún a entero
como $mdc(a_{k+1}, k) = 1$, si $(ak+1) \neq \pm 1$ tendremos que $f(x)$ tendrá por lo menos um factor primo a más. Absurdo! **[+3 puntos]**
De hecho, eso debe suceder pues $f(n) = \pm k$ admite un máximo de $2n$ raízes mientras que $x = wk^2$ puede asumir infinitos valores $(w \in \mathbb{Z})$. **[+1 punto]**

Segunda Solución
1- Sea $S = \{p \text{ primo } \mid p \text{ divide } f(n) \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}$
Si $\# S > 2003$, podemos escojer primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_{2004}$ y enteros $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ tales que valen las congruencias
$f(a_i) \equiv 0 (\operatorname{mod} p_i)$ (para cada i).
Por el Teorema chino de los restos podemos encontrar un x entero que resuelva todas las congruencias $x \equiv a_i (\operatorname{mod} p_i)$.
Para tal x tendremos $p_1 p_2, \ldots, p_{2004} \mid f(x)$. **[2 puntos]**
2- Suponga entonces que $\# S \leq 2003$. Sea $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 0 \text{ ou } p \text{ primo}, p \mid m \Rightarrow p \in S\}$.
Entonces $m \in A \Rightarrow m = \pm p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}, S = \{p_1, \ldots, p_r\}, r \leq 2003$.
Si $m \in A, m \leq N \Rightarrow \alpha_i \leq \log_{p_i} N \leq \log_2 N, \forall i \Rightarrow |A \cap [-N, N]| \leq 2(\log_2 N + 1)^{2003} + 1$, pero existe $c > 0$ tal que $|f(\mathbb{Z}) \cap [-N, N]| \geq C \sqrt[d]{N}$, donde d es el grado de f, y como $1 + 2(\log_2 N + 1)^{2003} < (\log N)^{2004} < C \sqrt[d]{N}$ para todo *N* suficientemente grande, eso es un absurdo. **[+3 puntos]**

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3

Sean las 3 palabras: a,b,c y sus gemelas a',b',c'. Identificamos las posibles combinaciones de 3 palabras con los vértices de un cubo de la siguiente forma:

$A=(a,b,c)$ (sucesión correcta)

$B_1=(a',b,c)$

$B_2=(a,b',c)$

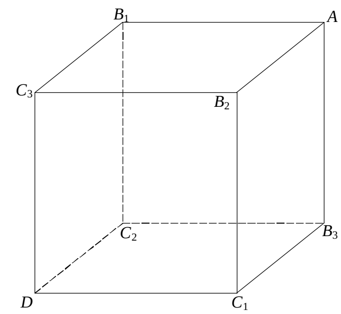
$B_3=(a,b,c')$

$C_1=(a,b',c')$

$C_2=(a',b,c')$

$C_3=(a',b',c)$

$D=(a',b',c')$



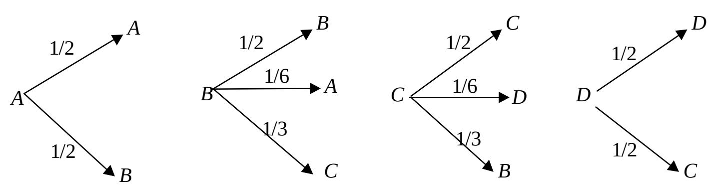
Podemos repensar el problema diciendo que a cada paso nos movemos una aresta según las probabilidades dadas.

Por la evidente simetría, las probabilidades de que luego de n pasos, estemos en B_1, B_2 ó B_3 son iguales, lo mismo vale para C_1, C_2, C_3.

Por eso, agrupamos los vértices del cubo en 4 grupos.

A ; $B=\{B_1,B_2,B_3\}$; $C=\{C_1,C_2,C_3\}; D$. **[1 punto]**

Nuestro diagrama de probabilidades será:



Definimos entonces:

$A_n =$ probabilidad de estar en el grupo A después de n pasos.

B_n, C_n, D_n son definidos análogamente.

Tenemos entonces las recurrencias:

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1}$$

$$b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}$$

$$c_n=\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}+\frac{1}{2}d_{n-1}$$

$$d_n=\frac{1}{2}d_{n-1}+\frac{1}{6}c_{n-1}$$

Ó

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

[1 punto]

Nuestro objetivo es encontrar a_n. Tenemos ahora dos maneras de terminar la solución:

Primera Solución:

Defina para eso: $\begin{cases} r_n = a_n + d_n \\ l_n = b_n + c_n \end{cases}$

De ahí:

$r_n = \frac{1}{2} r_{n-1} + \frac{1}{6} l_{n-1}$ (1)

$l_n = \frac{1}{2} r_{n-1} + \frac{5}{6} l_{n-1}$ (2)

Substituyendo (1) en (2), obtenemos:

$r_{n+1} = \frac{4}{3} r_n - \frac{1}{3} r_{n-1} \ (n \geq 1)$

lo que juntamente con los casos iniciales

$r_0 = 1; \quad r_1 = 1/2; \quad r_2 = 1/3; \quad r_3 = 10/36$

Nos da: $r_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Por otro lado, definiendo:

$\begin{cases} x_n = a_n - d_n \\ y_n = b_n - c_n \end{cases}$

Tendremos:

$x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{6} y_{n-1}$ (3)

$y_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{6} y_{n-1}$ (4)

Substituyendo (3) en (4) encontramos:

$x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n$ (para $n \geq 1$, cuidado!!)

$\Rightarrow x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$

Conclusión:

$a_n = \frac{1}{2}(r_n + x_n)$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \ \forall n \geq 1.$ **[+3 puntos]**

Segunda Solución:

Queremos encontrar los autovalores de X. Sea

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos $Y^{-1} = Y^T = Y$.

$$YXY = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_+ & 0 \\ 0 & X_- \end{pmatrix}$$

Los autovalores de X_+ y X_- son claramente 1, 1/3 y 0, 2/3, respectivamente **[+2 puntos]**

Así

$$a_n = v_1 + v_2\left(\frac{1}{3}\right)^n + v_3 (0)^n + v_4\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

y algunos casos dejan claro que

$v_1 = \frac{1}{8}, \quad v_2 = \frac{3}{8}, \quad v_3 = \frac{1}{8}, \quad v_4 = \frac{3}{8}.$ **[+1 punto]**

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4

Sean a y b enteros no-negativos. Si $b=0$, entonces es fácil ver que podemos tomar $N_{a,b}=1$. Suponga ahora que $b\geq 1$, y tome $N_{a,b}=a\cdot\binom{a}{b}+2$. Vamos a probar que ésta elección de $N_{a,b}$ sirve. Para tanto, suponga que tenemos $A_1,\ldots,A_n$ una familia (a,b) uniforme con $n>N_{a,b}$. Existe un conjunto $B\subset A_1$ com $|B|=b$ tal que para por lo menos $(n-1)\binom{a}{b}^{-1}$ índices j con $1<j\leq n$, tenemos $A_1\cap A_j=B$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que esto vale para todo j con $1<j\leq j_0=1+\left\lceil (n-1)\binom{a}{b}^{-1}\right\rceil$. Note que

(*) los conjuntos $A_j\setminus A_1$ con $1<j\leq j_0$ son dos a dos disjuntos.

[3 puntos por fijar un conjunto y conseguir conjuntos satisfaciendo (*).]

Si todo conjunto A_k con $j_0<k\leq n$ es tal que $A_1\cap A_k=B$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=B$, y vale la conclusión del problema. Suponga ahora que $A_1\cap A_k\neq B$ para algún $j_0<k\leq n$.
Entonces $A_k\cap(A_j\setminus A_1)\neq\varnothing$ para todo $1<j\leq j_0$. Por otro lado, como vale (*) y $j_0-1>|A_k|=a$, esto es imposible. Esto muestra que todo conjunto A_k con $j_0<k\leq n$ es tal que $A_1\cap A_k=B$, de manera que $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=B$, y vale la conclusión del problema. **[2 puntos si deduce la conclusión de (*).]**

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5

i) Sea $R=|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Tenemos $1+\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}=0$. Como $\frac{a_{n-1}}{z}=\frac{a_{n-1}(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}, \mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-1}}{z}\right)=\frac{a_{n-1}\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\geq 0$.

Como tenemos $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}+\frac{a_{n-3}}{z^3}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right)=-\mathrm{Re}\left(1+\frac{a_{n-1}}{z}\right)\leq -1$ **[1 punto]**,

debemos tener en particular $\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right|\geq 1$, pero

$\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right|\leq\frac{k}{R^2}+\frac{k}{R^3}+\ldots+\frac{k}{R^n}\leq\frac{k}{R^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{R^j}=\frac{k}{R^2}\cdot\frac{R}{R-1}=\frac{k}{R(R-1)}$. Así, debemos tener $\frac{k}{R(R-1)}\geq 1$, o sea, $R(R-1)\leq k$. Si $R\geq 1+\sqrt{k}$, $R-1\geq\sqrt{k}$ y $R(R-1)\geq\sqrt{k}(1+\sqrt{k})>k$, absurdo. Así, $|z|=R<1+\sqrt{k}$. **[+2 puntos]**

ii) Tenemos dos casos:

a) $z=\alpha+\beta i,\alpha\geq 0,|\beta|\leq\alpha$. En ese caso, $\frac{a_{n-2}}{z^2}=\frac{a_{n-2}(\alpha-\beta i)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{a_{n-2}(\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta i)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$, de donde $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}\right)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\cdot a_{n-2}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\geq 0$. Así, $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-3}}{z^3}+...+\frac{a_0}{z^n}\right)=-\mathrm{Re}\left(1+\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}\right)\leq -1$,

y luego $1\leq\left|\frac{a_{n-3}}{z^3}+...+\frac{a_0}{z^n}\right|\leq\frac{k}{R^3}+...+\frac{k}{R^n}\leq\frac{k}{R^3}\cdot\frac{R}{R-1}=\frac{k}{R^2(R-1)}$, de donde $R^2(R-1)\leq k$. Si $R\geq 1+\sqrt[3]{k}, R-1\geq\sqrt[3]{k}$ e $R^2(R-1)>k$, absurdo. Así, $|z|=R<1+\sqrt[3]{k}$. **[1 punto]**

b) $z=\alpha+\beta i,\ \alpha\geq 0,\ |\beta|>\alpha$. Como z es raíz de $P\Leftrightarrow\bar{z}$ es raíz de *P*, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\beta>\alpha$. Tenemos entonces $\mathrm{Im}\left(\frac{a_{n-1}}{z}\right)=\frac{-\beta a_{n-1}}{\alpha^2+\beta^2}\leq 0$ y $\mathrm{Im}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}\right)=\frac{-2\alpha\beta a_{n-2}}{R^4}$, mientras $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-1}}{z}\right)=\frac{\alpha a_{n-1}}{\alpha^2+\beta^2}\geq 0$ y

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}\right)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)a_{n-2}}{R^4}\geq-\frac{(\alpha^2+\beta^2)a_{n-2}}{R^4}=\frac{-a_{n-2}}{R^2}.$$

Así, como

$$\left|\frac{a_{n-3}}{z^3}+...+\frac{a_0}{z^n}\right|\leq\frac{k}{R^2(R-1)},\left|\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-3}}{z^3}+...+\frac{a_0}{z^n}\right)\right|\leq\frac{k}{R^2(R-1)}\ \text{ e }\ \left|\mathrm{Im}\left(\frac{a_{n-3}}{z^3}+...+\frac{a_0}{z^n}\right)\right|\leq\frac{k}{R^2(R-1)},$$

por lo tanto tenemos

(*) $\frac{a_{n-2}}{R^2}+\frac{k}{R^2(R-1)}\geq\mathrm{Re}\left(1+\frac{a_{n-1}}{z}\right)\geq 1$ y

(**) $\frac{k}{R^2(R-1)}\geq-\mathrm{Im}\left(\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}\right)\geq\frac{2a_{n-2}\alpha\beta}{R^4}$. Suponiendo por absurdo que $\alpha\geq 1+\sqrt[3]{k}$, tenemos $R\geq\alpha\geq 1+\sqrt[3]{k}$ y luego $R^2(R-1)>k$.

De (**), $a_{n-2}\leq\frac{kR^2}{2\alpha\beta(R-1)}$, y luego, de (*), $\frac{k}{2\alpha\beta(R-1)}+\frac{k}{R^2(R-1)}\geq 1$, de donde $\frac{kR^2}{\alpha\beta}+2k\geq 2R^2(R-1)$, y luego $\alpha\beta\leq\frac{kR^2}{2(R^2(R-1)-k)}$. Como $\alpha<\beta$, $\alpha^2\leq\alpha\beta\leq\frac{kR^2}{2(R^2(R-1)-k)}$. Como $R^2=\alpha^2+\beta^2>2\alpha^2$, y $\alpha\geq 1+\sqrt[3]{k}$, tenemos $R>\alpha\sqrt{2}>1+\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{k}, R^2>2\alpha^2>2\sqrt[3]{k^2}$, de donde

$$\frac{kR^2}{2(R^2(R-1)-k)}=\frac{k}{2\left(R-1-\frac{k}{R^2}\right)}<\frac{k}{2\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{k}-\frac{k}{2\sqrt[3]{k^2}}\right)}=\frac{k}{(2\sqrt{2}-1)\sqrt[3]{k}}<\sqrt[3]{k}^2<\alpha^2,$$ absurdo.

[+3 puntos]

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6

Tenemos $AB=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $A^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$. **[1 punto]**

Como $B^{\varepsilon_1}A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B^{\varepsilon_2}=I \Leftrightarrow A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B=B^{\varepsilon_1+1-\varepsilon_2}B$ y $B^{\varepsilon_1+1-\varepsilon_2}\in\{I,B\}$, es suficiente mostrar que para todo $k\ge 1, s_1,\ldots,s_k\in\{-1,1\}$, $A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B$ tiene entradas irracionales para concluir que $B^{\varepsilon_1}A^{s_1}B\ldots A^{s_k}B^{\varepsilon_2}\ne I$ (pues de hecho las entradas de I y de B son todas enteras).

[Conjecturar que $A^{s_1}B\ldots A^{s_k}B$ tienen siempre entradas irracionales, para todo $k\ge 1, s_1,\ldots,s_k\in\{-1,1\}$: 2 puntos]

Para eso, vamos a mostrar por inducción que para todo $k\ge 1, s_1,\ldots,s_k\in\{-1,1\}$, $A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B$ es siempre de la forma $\frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} a_n & b_n\sqrt{3} & c_n\sqrt{3}\\ d_n\sqrt{3} & e_n & f_n\\ g_n\sqrt{3} & h_n & i_n\end{pmatrix}$, donde a_n, c_n, d_n e f_n son enteros impares y b_n, e_n, g_n, h_n y i_n son enteros pares. Para eso, sea

$A^{s_{k+1}}B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \varepsilon\sqrt{3}/2\\ -\varepsilon\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon\sqrt{3}\\ -\varepsilon\sqrt{3} & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$, donde $\varepsilon\in\{-1,1\}$. Tenemos entonces

$A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}BA^{s_{k+1}}B=\frac{1}{2^{k+1}}\begin{pmatrix} a_n-3\varepsilon b_n & -2c_n\sqrt{3} & (\varepsilon a_n+b_n)\sqrt{3}\\ (d_n-\varepsilon e_n)\sqrt{3} & -2f_n & 3\varepsilon d_n+e_n\\ (g_n-\varepsilon h_n)\sqrt{3} & -2i_n & 3\varepsilon g_n+h_n\end{pmatrix}$, y es fácil ver que $a_{n+1}=a_n-3\varepsilon b_n, c_{n+1}=\varepsilon a_n+b_n, d_{n+1}=d_n-\varepsilon e_n$ y $f_{n+1}=3\varepsilon d_n+e_n$ son enteros impares mientras $b_{n+1}=-2c_n, e_{n+1}=-2f_n, g_{n+1}=g_n-\varepsilon h_n, h_{n+1}=-2i_n$ y $i_{n+1}=3\varepsilon g_n+h_n$ son enteros pares. **[+4 puntos]**

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7

Sea $z=a-bi$, luego $iz=b+ai$. Queremos probar que $b=0$.

Tenemos $z=\tan z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$, donde $\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=iz$, luego $e^{2iz}=\frac{1+iz}{1-iz}$, o sea, $e^{2b}(\cos 2a+i\operatorname{sen}2a)=\frac{1+b+ai}{1-b-ai}=\frac{1-b^2-a^2+2ai}{(1-b)^2+a^2}$. Así, debemos tener (calculando normas) $e^{4b}=\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}$ y (calculando argumentos) $\tan 2a=\frac{2a}{1-b^2-a^2}$. **[1 punto]**

De $e^{4b}=\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}$, tenemos $e^{4b}-1=\frac{4b}{(1-b)^2+a^2}$, donde, suponiendo por contradicción que $b\ne 0$, $a^2=\frac{4b}{e^{4b}-1}-(1-b)^2$. **[+1 punto]**

Como $e^{4b}=\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}\Leftrightarrow e^{-4b}=\frac{(1-b)^2+a^2}{(1+b)^2+a^2}$ y $\tan 2a=\frac{2a}{1-b^2-a^2}=\frac{2a}{1-(-b)^2-a^2}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b>0$, y como $\tan 2a=\frac{2a}{1-b^2-a^2}\Leftrightarrow\tan(-2a)=\frac{-2a}{1-b^2-(-a)^2}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a\ge 0$. **[+1 punto].**

Tenemos entonces $e^{4b} > 1+4b+\frac{1}{2}(4b)^2$, y luego

$a^2 = \frac{4b}{e^{4b}-1} - (1-b)^2 < \frac{4b}{4b+8b^2} - (1-b)^2 = \frac{1}{1+2b} - (1-b)^2.$ Si $0 \le b \le \frac{1}{4}$, tenemos $a^2 \le 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} < \frac{1}{2}.$ Se $\frac{1}{4} \le b \le \frac{1}{2}$, tenemos $a^2 \le \frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{4}} - \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$, y si $b \ge \frac{1}{2}$ tenemos $a^2 \le \frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$ Em cualquier caso, $|a| \le \sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$, donde $\frac{1-b^2-a^2}{(1-b)^2+a^2} = \cos(2a) > 0$, de donde $a^2 + b^2 < 1$. **[+1 punto]**

Notemos ahora que

$\frac{4b}{e^{4b}-1} - (1-b)^2 \le b^2 \Leftrightarrow 4b \le (e^{4b}-1)(1-2b+2b^2) \Leftrightarrow 1+2b+2b^2 \le e^{4b}(1-2b+2b^2).$

Si $f(b)=1+2b+2b^2$ y $g(b) = e^{4b}(1-2b+2b^2)$, tenemos $f(0)=1=g(0)$, $f'(b)=4b+2$, $g'(b)=e^{4b}(2-4b+8b^2)$, $f''(b)=4$, $g''(b)=e^{4b}(4+32b^2)$, y luego $f'(0)=2=g'(0)$ y $f''(b) \le g''(b), \forall b \ge 0$, de donde $f(b) \le g(b), \forall b \ge 0$, y luego $a^2 = \frac{4b}{e^{4b}-1} - (1-b)^2 \le b^2$. **[+1 punto]**

Ahora, si $a=0$, tendremos $e^{2b} = \frac{1+b}{1-b}$, donde $b<1$, pero $(1-b)e^{2b} < 1+b$ para todo $b>0$, pues si $\tilde{f}(x) = (1-x)e^{2x}$ e $\tilde{g}(x) = 1+x$, tenemos $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 1$, $\tilde{f}'(x) = (1-2x)e^{2x}$, $\tilde{g}'(x)=1$ y luego $\tilde{f}(0) = \tilde{g}'(0) = 1$, y $\tilde{f}''(x) = 4xe^{2x} \le 0 = \tilde{g}''(x), \forall x \ge 0$. Por lo tanto podemos suponer $a>0$.

[+1 punto]

Así, $\tan 2a = \frac{2a}{1-b^2-a^2} \ge \frac{2a}{1-2a^2}$, pues $a^2 \le b^2$, pero $\tan 2a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} < \frac{2a}{1-\frac{1}{2}(2a)^2} = \frac{2a}{1-2a^2}$ para $a>0$, pues $\operatorname{sen} x < x$ para $x<0$ y $\cos x + \frac{x^2}{2} \ge 1, \forall x \ge 0$ (de hecho, si $h(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, $h'(x) = x - \operatorname{sen} x \ge 0, \forall x \ge 0$). Note que, como $a^2 \le b^2$ y $a^2+b^2<1$, tenemos $2a^2 \le a^2+b^2 < 1$. Esto da $\frac{2a}{1-2a^2} > \tan 2a \ge \frac{2a}{1-2a^2}$, lo que es una contradicción. **[+2 puntos].**

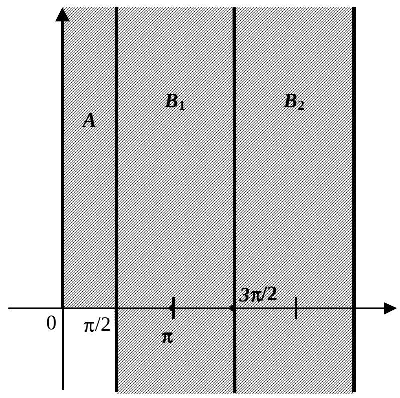
SEGUNDA SOLUCIÓN:

Vamos a considerar separadamente las siguientes regiones:

$$A = \{z = a+bi \mid 0 \le a \le \frac{\pi}{2}, b \ge 0\}$$

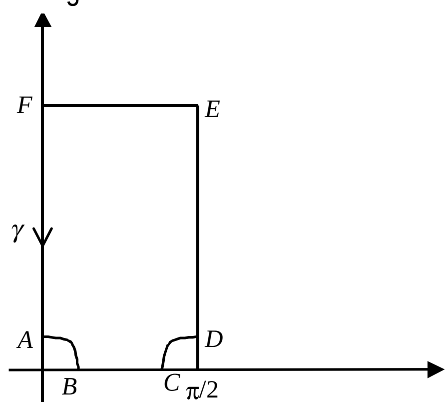
$$B_k = \left\{z = a+bi \mid k\pi - \frac{\pi}{2} \le a \le k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}, k>0.$$

Note que en cada región B_k hay una solución real.

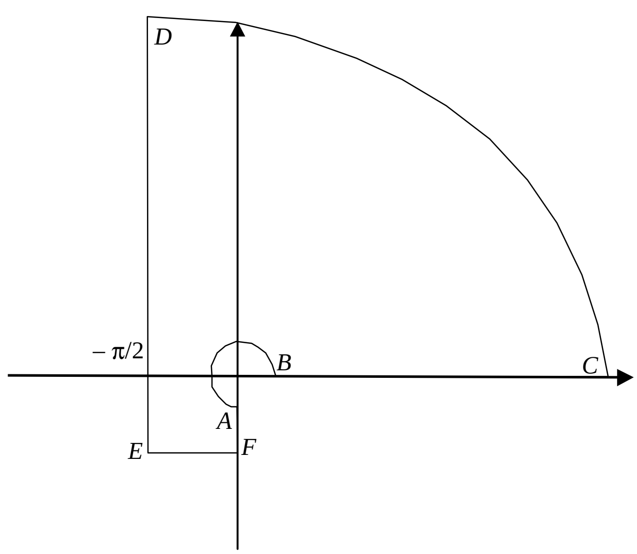


Basta demostrar que $z=0$ es la única solución en A y que hay una única solución en cada región B_k **[1 punto]**

Región A: Sea $f(z)=\tan z - z$. Queremos probar que f no admite ninguma raíz en *A* exceto $z=0$. Considere un camino γ como en la figura:



La imagen de γ por f es:



donde el comportamiento del arco AB es indicado por la serie de Taylor de f, el de BC por el comportamiento de la función real tangente, el arco CD por el comportamiento de la función cerca del polo, el arco DE por el comportamiento de la función coth, el arco EF por el comportamiento cuando $b >> 0$ y el arco AF por el comportamiento de la función tanh.
En todo caso, es claro que la curva $f(\gamma)$ da 0 vueltas alrededor del origen donde f tiene 0 raices dentro de γ. **[4 puntos]**

Región B_k **:**

Sea $C_k = \{z = a + b_i \mid k\pi - \frac{\pi}{2} \le a \le k\pi\}$ e $D_k = \{z = a + b_i \mid k\pi \le a \le k\pi + \frac{\pi}{2}\}$.
La imagen por tan de la región C_k está contenida en el segundo o tercero cuadrantes luego no hay puntos fijos en C_k. Basta verificar que la función tan tiene un único punto fijo en D_k. Sea γ como abajo; la imagen por tan de la curva γ es como $\tilde{\gamma}$ en la figura (el arco AF da el comportamiento cerca del polo, los arcos AB y EF vienen del comportamiento de la función cotanh, el arco CD del comportamiento de tanh y los arcos BC y DE del comportamiento cuando $|b| >> 0$). Como $\tilde{\gamma}$ da una vuelta alrededor de γ tenemos exactamente un punto fijo. **[+3 puntos]**