Flujos horocíclicos sin conjuntos minimales

Victoria García
Orientadores: Matilde Martínez y Rafael Potrie

Maestría en Matemática
Universidad de la República, Facultad de Ciencias

November 12, 2020

Sea M una superficie Riemanniana que cumple:

Sea M una superficie Riemanniana que cumple:

- es completa

Sea M una superficie Riemanniana que cumple:

- es completa
- tiene curvatura negativa y acotada

Sea M una superficie Riemanniana que cumple:

- es completa
- tiene curvatura negativa y acotada
- todos los elementos de su grupo fundamental, Γ, son hiperbólicos

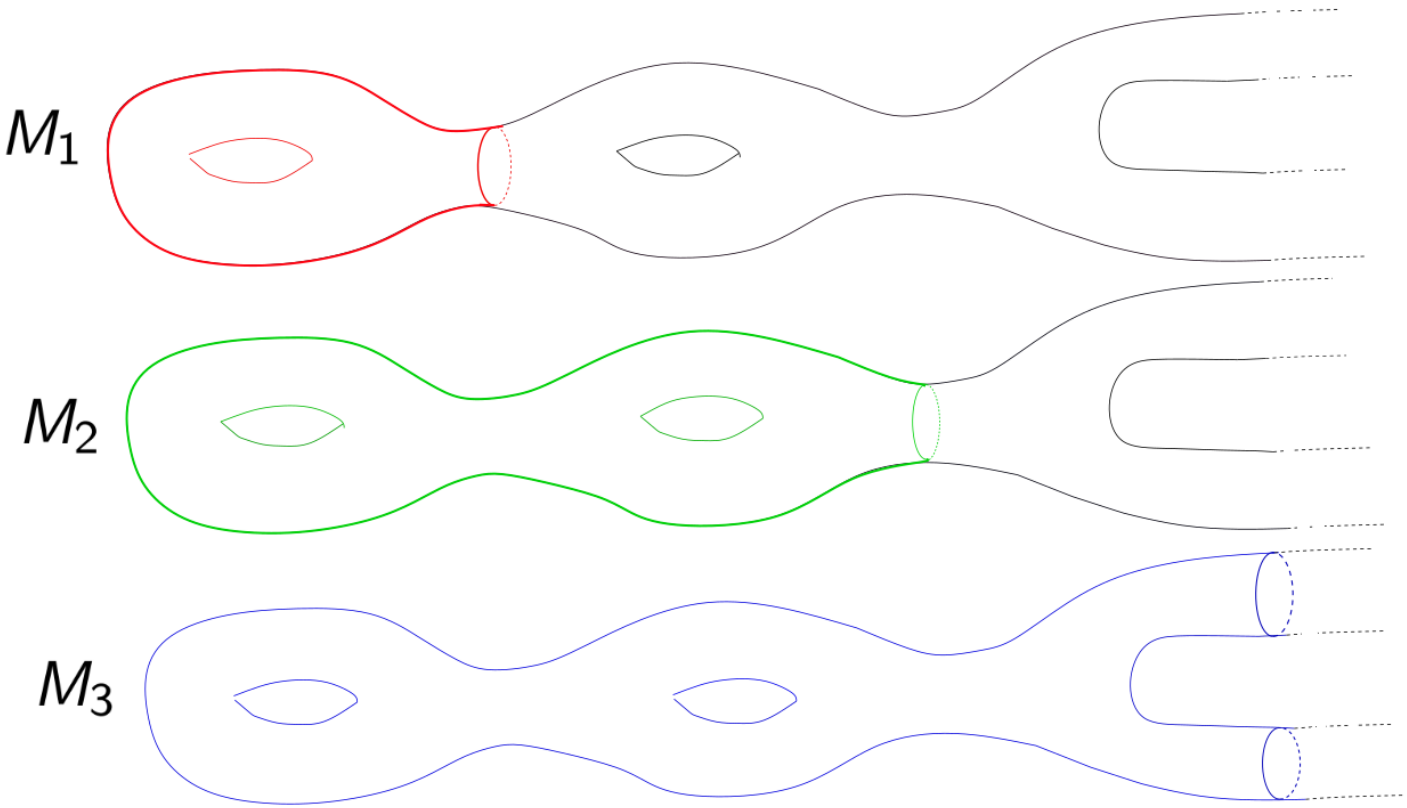
Sea M una superficie Riemanniana que cumple:

- es completa
- tiene curvatura negativa y acotada
- todos los elementos de su grupo fundamental, Γ, son hiperbólicos
- $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$ donde $M_i \subseteq M_{i+1}$ para todo i, donde las M_i son subvariedades de M, compactas con borde, tales que las componentes del borde ∂M_i son geodésicas cuya longitud está acotada por una constante $C > 0$.

Teorema

No existen conjuntos minimales para la acción del flujo horocíclico en T^1M.

Una superficie así:



Flujo geodésico

Sea M una superficie con una métrica de curvatura negativa, y sea $\tilde{M}$ su cubrimiento universal Riemanniano. Si Γ es el grupo fundamental de M, pensamos $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ y $M \simeq \Gamma \backslash \tilde{M}$.
Dado $(\tilde{p}, \tilde{v}) \in T^1\tilde{M}$, $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{M}$ la geodésica que en tiempo $t = 0$ pasa por $\tilde{p}$ con velocidad $\tilde{v}$.

Flujo geodésico

Sea M una superficie con una métrica de curvatura negativa, y sea $\tilde{M}$ su cubrimiento universal Riemanniano. Si Γ es el grupo fundamental de M, pensamos $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ y $M \simeq \Gamma \backslash \tilde{M}$.
Dado $(\tilde{p}, \tilde{v}) \in T^1\tilde{M}$, $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{M}$ la geodésica que en tiempo $t = 0$ pasa por $\tilde{p}$ con velocidad $\tilde{v}$.

- El flujo geodésico $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es: $g_t(\tilde{v}) = \gamma_{\tilde{v}}(t)$.

Flujo geodésico

Sea M una superficie con una métrica de curvatura negativa, y sea $\tilde{M}$ su cubrimiento universal Riemanniano. Si Γ es el grupo fundamental de M, pensamos $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ y $M \simeq \Gamma \backslash \tilde{M}$.
Dado $(\tilde{p}, \tilde{v}) \in T^1\tilde{M}$, $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{M}$ la geodésica que en tiempo $t = 0$ pasa por $\tilde{p}$ con velocidad $\tilde{v}$.

- El flujo geodésico $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es: $g_t(\tilde{v}) = \gamma_{\tilde{v}}(t)$.
- En $\tilde{M}$ el flujo geodésico es un flujo de Anosov, y podemos definir:

Flujo geodésico

Sea M una superficie con una métrica de curvatura negativa, y sea $\tilde{M}$ su cubrimiento universal Riemanniano. Si Γ es el grupo fundamental de M, pensamos $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ y $M \simeq \Gamma \backslash \tilde{M}$.
Dado $(\tilde{p}, \tilde{v}) \in T^1\tilde{M}$, $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{M}$ la geodésica que en tiempo $t = 0$ pasa por $\tilde{p}$ con velocidad $\tilde{v}$.

- El flujo geodésico $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es: $g_t(\tilde{v}) = \gamma_{\tilde{v}}(t)$.
- En $\tilde{M}$ el flujo geodésico es un flujo de Anosov, y podemos definir:
- $\hat{W}^s(\tilde{v}) = \{\tilde{w} \in \tilde{M}$ tal que $dist(g_t(\tilde{v}), g_t(\tilde{w})) \to 0$ cuando $t \to \infty\}$

Flujo geodésico

Sea M una superficie con una métrica de curvatura negativa, y sea $\tilde{M}$ su cubrimiento universal Riemanniano. Si Γ es el grupo fundamental de M, pensamos $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ y $M \simeq \Gamma \backslash \tilde{M}$.
Dado $(\tilde{p}, \tilde{v}) \in T^1\tilde{M}$, $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{M}$ la geodésica que en tiempo $t = 0$ pasa por $\tilde{p}$ con velocidad $\tilde{v}$.

- El flujo geodésico $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es: $g_t(\tilde{v}) = \gamma_{\tilde{v}}(t)$.
- En $\tilde{M}$ el flujo geodésico es un flujo de Anosov, y podemos definir:
- $\hat{W}^s(\tilde{v}) = \{\tilde{w} \in \tilde{M}$ tal que $dist(g_t(\tilde{v}), g_t(\tilde{w})) \to 0$ cuando $t \to \infty\}$
- $\hat{W}^u(\tilde{v}) = \{\tilde{w} \in \tilde{M}$ tal que $dist(g_{-t}(\tilde{v}), g_{-t}(\tilde{w})) \to 0$ cuando $t \to \infty\}$

Flujo horocíclico

Definición

El flujo horocíclico estable en $T^1\tilde{M}$ será el flujo que empuja a los vectores a lo largo de su conjunto estable fuerte definido más arriba.

Definición

El flujo horocíclico en T^1M será la proyección del flujo horocíclico en $T^1\tilde{M}$ sobre T^1M.

Esta definición tiene sentido porque los elementos de Γ preservan el flujo geodésico por ser isometrías, y por tanto también el flujo horocíclico.

Minimalidad

Minimalidad

Definición

Decimos que un subconjunto $X \subset T^1M$ es minimal para el flujo horocíclico, si es cerrado, invariante para este flujo, y minimal con estas características respecto de la inclusión (o sea, no tiene a su vez subconjuntos propios cerrados e invariantes).

Teorema de Hedlund

Teorema de Hedlund

Teorema

Sea M compacta, de curvatura constante negativa (hiperbólica). Entonces el flujo horocíclico en T^1M es minimal, esto es, que todo T^1M es un conjunto minimal. (Hedlund, 1936)

Superficies hiperbólicas

Superficies hiperbólicas

- El cubrimiento universal de una superficie hiperbólica M, es siempre $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$

Superficies hiperbólicas

- El cubrimiento universal de una superficie hiperbólica M, es siempre $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$
- Existe $\Gamma < Isom^+(\mathbb{H})$ tal que la superficie M es $\Gamma \backslash \mathbb{H}$

Superficies hiperbólicas

- El cubrimiento universal de una superficie hiperbólica M, es siempre $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$
- Existe $\Gamma < Isom^+(\mathbb{H})$ tal que la superficie M es $\Gamma \backslash \mathbb{H}$
- $Isom^+(\mathbb{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$

Superficies hiperbólicas

- El cubrimiento universal de una superficie hiperbólica M, es siempre $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$
- Existe $\Gamma < Isom^+(\mathbb{H})$ tal que la superficie M es $\Gamma \backslash \mathbb{H}$
- $Isom^+(\mathbb{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$
- $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq T^1\mathbb{H}$

Superficies hiperbólicas

- El cubrimiento universal de una superficie hiperbólica M, es siempre $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$
- Existe $\Gamma < Isom^+(\mathbb{H})$ tal que la superficie M es $\Gamma \backslash \mathbb{H}$
- $Isom^+(\mathbb{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$
- $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq T^1\mathbb{H}$
- T^1M se puede también identificar con $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$

El teorema de Matsumoto

El teorema de Matsumoto

Definición

Un grupo Fuchsiano Γ *se dice que es* **tight** *si cumple:*

1. Γ *es puramente hiprbólico*
2. *La variedad* $M := \Gamma\backslash\mathbb{H}$ *es no compacta, y se puede escribir como union creciente de variedades compactas* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, cuyas componentes de borde son geodésicas de longitud acotada por cierta constante* $C > 0$*.*

El teorema de Matsumoto

El teorema de Matsumoto

- En estas condiciones vamos a decir que la superficie M, como arriba, es una superficie tight.

El teorema de Matsumoto

- En estas condiciones vamos a decir que la superficie M, como arriba, es una superficie tight.

Teorema

Si M es una superficie tight, el flujo horocíclico en T^1M no admite conjuntos minimales. (Matsumoto, 2014)

Flujo geodésico y horocíclico en superficies hiperbólicas y tight

Flujo geodésico y horocíclico en superficies hiperbólicas y tight

- El flujo geodésico g^t actua en $PSL(2,\mathbb{R})$ mediante la multiplicación a derecha por

$$\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

Flujo geodésico y horocíclico en superficies hiperbólicas y tight

- El flujo geodésico g^t actua en $PSL(2,\mathbb{R})$ mediante la multiplicación a derecha por

$$\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

- Por otro lado, el flujo horocíclico h^s actua por multiplicación a derecha por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Flujo geodésico y horocíclico en superficies hiperbólicas y tight

- El flujo geodésico g^t actua en $PSL(2,\mathbb{R})$ mediante la multiplicación a derecha por

$$\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

- Por otro lado, el flujo horocíclico h^s actua por multiplicación a derecha por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Estas acciones pasan a su vez al cociente $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H} = T^1M$

Una simplificación

Una simplificación

- Se observa que la acción de h^s en $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ es (de alguna manera) equivalente a la acción de Γ en $T^1\mathbb{H}/\langle h^s \rangle =: \mathbb{A}$

Una simplificación

- Se observa que la acción de h^s en $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ es (de alguna manera) equivalente a la acción de Γ en $T^1\mathbb{H}/\langle h^s \rangle =: \mathbb{A} \simeq \mathbb{R}^2/\langle \pm 1 \rangle$.

Una simplificación

- Se observa que la acción de h^s en $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ es (de alguna manera) equivalente a la acción de Γ en $T^1\mathbb{H}/\langle h^s \rangle =: \mathbb{A} \simeq \mathbb{R}^2/\langle \pm 1 \rangle$.
- La acción del flujo geodésico g^t en $\mathbb{A}$ no es más que la multiplicación escalar por $e^{t/2}$.

Una simplificación

- Se observa que la acción de h^s en $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ es (de alguna manera) equivalente a la acción de Γ en $T^1\mathbb{H}/\langle h^s \rangle =: \mathbb{A} \simeq \mathbb{R}^2/\langle \pm 1 \rangle$.
- La acción del flujo geodésico g^t en $\mathbb{A}$ no es más que la multiplicación escalar por $e^{t/2}$.
- Con esta equivalencia en mente, encontrar un minimal para la acción de Γ en $\mathbb{A}$, es equivalente a encontrar un minimal para la acción de h^s en T^1M. Del mismo modo, si una acción no tiene minimales, la otra tampoco.

Pregunta

¿Cómo sería una superficie “tight” en curvatura variable?

Pregunta

¿Cómo sería una superficie "tight" en curvatura variable?

Una superficie de curvatura variable es *tight* si su grupo fundamental $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ verifica:

Pregunta

¿Cómo sería una superficie "tight" en curvatura variable?

Una superficie de curvatura variable es *tight* si su grupo fundamental $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ verifica:

1. Γ es puramente hiperbólico
2. La variedad $M := \Gamma \backslash \tilde{M}$ es no compacta, y se puede escribir como union creciente de variedades compactas $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cuyos bordes son geodésicas (o unión de geodésicas) de longitud acotada por cierta constante $C > 0$.

Pregunta

¿Cómo sería una superficie "tight" en curvatura variable?

Una superficie de curvatura variable es *tight* si su grupo fundamental $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ verifica:

1. Γ es puramente hiperbólico
2. La variedad $M := \Gamma \backslash \tilde{M}$ es no compacta, y se puede escribir como union creciente de variedades compactas $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cuyos bordes son geodésicas (o unión de geodésicas) de longitud acotada por cierta constante $C > 0$.

¿Qué significa en curvatura variable que Γ sea puramente hiperbólico?

Pregunta

¿Cómo sería una superficie "tight" en curvatura variable?

Una superficie de curvatura variable es *tight* si su grupo fundamental $\Gamma < Isom^+(\tilde{M})$ verifica:

1. Γ es puramente hiperbólico
2. La variedad $M := \Gamma \backslash \tilde{M}$ es no compacta, y se puede escribir como union creciente de variedades compactas $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cuyos bordes son geodésicas (o unión de geodésicas) de longitud acotada por cierta constante $C > 0$.

¿Qué significa en curvatura variable que Γ sea puramente hiperbólico?

Significa que todas las isometrías de Γ tienen exactamente dos puntos fijos, y que ambos están en el borde infinito de $\tilde{M}$.

La función de Busemann

La función de Busemann basada en un punto $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$, nos permite definir en $\tilde{M}$ a los horociclos como sus conjuntos de nivel.

La función de Busemann

La función de Busemann basada en un punto $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$, nos permite definir en $\tilde{M}$ a los horociclos como sus conjuntos de nivel. De esta forma, el espacio de horociclos se identificacon $S^1 \times \mathbb{R}$

La función de Busemann

La función de Busemann basada en un punto $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$, nos permite definir en $\tilde{M}$ a los horociclos como sus conjuntos de nivel. De esta forma, el espacio de horociclos se identificacon $S^1 \times \mathbb{R}$
Un horociclo es (ξ, t), donde ξ es punto de $\partial_\infty \tilde{M}$, y t el valor de la función de Busemann en el horociclo.

Puntos límite

Definición

Los puntos límite para la acción de Γ*, son los puntos de* $\partial_\infty \tilde{M}$ *donde acumulan las* Γ*-órbitas de los puntos de* $\tilde{M}$*.*

Puntos límite

Definición

Los puntos límite para la acción de Γ*, son los puntos de* $\partial_\infty \tilde{M}$ *donde acumulan las* Γ*-órbitas de los puntos de* $\tilde{M}$*.*

Definición

Un punto límite ξ *se dice que es un punto límite "horocíclico", si para cada horociclo* (ξ, t) *y para cada* $z \in \tilde{M}$*, existe* $\gamma \in \Gamma$ *tal que* $B_\xi(0, \gamma(z)) > t$*. Diremos que* ξ *es "no horocíclico", si no es horocíclico.*

Resultados importantes

Los siguientes resultados para superficies de curvatura constante, son clave en la prueba del teorema de Matsumoto.

.

Resultados importantes

Los siguientes resultados para superficies de curvatura constante, son clave en la prueba del teorema de Matsumoto. F. Dal'Bo generaliza estos resultados para superficies de curvatura variable, de modo que valen para las superficies en las hipótesis del teorema que queremos probar:

.

Resultados importantes

Los siguientes resultados para superficies de curvatura constante, son clave en la prueba del teorema de Matsumoto. F. Dal'Bo generaliza estos resultados para superficies de curvatura variable, de modo que valen para las superficies en las hipótesis del teorema que queremos probar:

- Los horociclos en $T^1\tilde{M}$ basados en puntos límite horocíclicos se proyectan sobre horociclos densos en T^1M.

Resultados importantes

Los siguientes resultados para superficies de curvatura constante, son clave en la prueba del teorema de Matsumoto. F. Dal'Bo generaliza estos resultados para superficies de curvatura variable, de modo que valen para las superficies en las hipótesis del teorema que queremos probar:

- Los horociclos en $T^1\tilde{M}$ basados en puntos límite horocíclicos se proyectan sobre horociclos densos en T^1M.
- Si $X \subset T^1M$ es un conjunto minimal para el flujo horocíclico y $v \in X$, entonces su levantado $\tilde{v} \in T^1\tilde{M}$ pertenece a un horociclo basado en un punto límite horocíclico.

Recordamos el teorema: Si M una superficie Riemanniana que cumple:

- es completa
- tiene curvatura negativa y acotada
- todos los elementos de su grupo fundamental, Γ, son hiperbólicos
- $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots$ donde $M_i \subseteq M_{i+1}$ para todo i, donde las M_i son subvariedades de M, compactas con borde, tales que las componentes del borde ∂M_i son geodésicas cuya longitud está acotada por una constante $C > 0$,

entonces no existen conjuntos minimales para la acción del flujo horocíclico en T^1M.

Prueba del teorema

Prueba del teorema

Sea $X \subset T^1M$ minimal para el flujo horocíclico y $x \in X$, $\overline{\{h_s(x)\}} = X$, de otro modo, $\overline{\{h_s(x)\}} \subsetneq X$ sería un cerrado invariante, contradiciendo que X es minimal.

Prueba del teorema

Sea $X \subset T^1M$ minimal para el flujo horocíclico y $x \in X$, $\overline{\{h_s(x)\}} = X$, de otro modo, $\overline{\{h_s(x)\}} \subsetneq X$ sería un cerrado invariante, contradiciendo que X es minimal.
Si $X = T^1M$, todas las órbitas del flujo horocíclico serían densas $\Rightarrow$ todos los puntos límite son horocíclicos, pero sabemos que esto es falso
$\Rightarrow X \subsetneq T^1M$.

Prueba del teorema

Sea $X \subset T^1M$ minimal para el flujo horocíclico y $x \in X$, $\overline{\{h_s(x)\}} = X$, de otro modo, $\overline{\{h_s(x)\}} \subsetneq X$ sería un cerrado invariante, contradiciendo que X es minimal.
Si $X = T^1M$, todas las órbitas del flujo horocíclico serían densas $\Rightarrow$ todos los puntos límite son horocíclicos, pero sabemos que esto es falso
$\Rightarrow X \subsetneq T^1M$.
Sea $\tilde{v} \in T^1\tilde{M}$ un levantado de x, y $\xi = \tilde{v}(\infty)$. Por el primer resultado, el punto ξ no es horocíclico porque $\overline{\{h_s(\tilde{v})\}} = X \neq T^1M$. Entonces ξ es no horocíclico, contradiciendo el segundo resultado.

FIN