Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
IMERL

Curso Cálculo 1 2008

Sucesiones

Una sucesión de números reales es una "tira", o una lista, de nḿeros reales que generalmente denotamos como

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\ldots$$

En definitiva, es una correspondencia que a cada número natural le asigna un número real (no necesariamente diferente).

Definición 1. Una *sucesión* $\{a_n\}$ es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con la cual utilizamos la notación $a(i) = a_i$.

Utilizaremos las sucesiones como herramienta para estudiar propiedades de los números reales y para ello, nos interesará investigar las propiedades de las sucesiones en el "infinito" (veremos que significa esto). En el Spivak hay algunos ejemplos de sucesiones y de algunas visualizaciones de estas que vale la pena revisar (es en la segunda página del Capítulo 21, en mi libro es la pag. 614).

El primer concepto de comportamiento asintótico de la sucesión, o comportamiento en el "infinito" es el de punto de aglomeración que es el que sigue.

Definición 2. Dada una sucesión $\{a_n\}$ decimos que $h \in \mathbb{R}$ es punto de aglomeración (notación, $h \in H_a$) siempre que $\forall \varepsilon > 0$ y $n_0 > 0$, existe $N > n_0$ que verifica que $a_N \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$.

Observación 1. Decir que $a_N \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ h - \varepsilon < x < h + \varepsilon\}$ es equivalente a que $|a_N - h| < \varepsilon$.

Puede resultar complicado comprender que la definición de punto de aglomeración es una propiedad en el "infinito" porque dados el valor de ε y n_0, basta con encontrar un elemento de la sucesión se acerque a menos de ε de h. La razón por la cual es efectivamente un comportamiento a largo plazo es justamente el hecho de que elegimos el valor de n_0 y que N tiene que ser mayor que este (en clase vimos algunos ejemplos de sucesiones y sus puntos de aglomeración).

Teorema 1. *Un punto h es de aglomeración de una sucesión $\{a_n\}$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existen infinitos valores distintos de $n > 0$ de forma tal que $a_n \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 > 0$, por hipótesis, existen infinitos valores de n de forma tal que $a_n \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$, dado que hay finitos valores de $n \leq n_0$ tiene que existir $N > n_0$ de forma tal que $a_n \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ como queremos.

($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, observamos primero que dado un número $M > 0$, existe $N > M$ de forma tal que $a_N \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ (esto es exactamente la definición de punto de aglomeración con $M = n_0$).

Para encontrar infinitos, lo haremos por inducción. Probaremos primero que hay un valor de n para el cual $a_n \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ y luego, que si hay k valores de n con esa propiedad, entonces, deben haber $k + 1$ (esto implicará que hay tantos valores de n donde se cumple eso como números naturales).

La primera observación es inmediata, ya que es consecuencia directa de la definición de punto de aglomeración. Para ver la segunda, sean $\{n_1, \ldots, n_k\}$ los k números naturales diferentes que verifican lo deseado. Entonces, consideramos $M = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$ (¿Por qué un conjunto finito tiene máximo?) y lo que ya probamos implica que existe un valor N mayor que M (en particular N es diferente de todos los n_i) de forma que $a_N \in (h-\varepsilon, h+\varepsilon)$ con lo cual probamos lo afirmado y concluimos la prueba.

□

A partir de los puntos de aglomeración, podremos definir otros conceptos que nos interesarán sobre el comportamiento asintótico de las sucesiones, en particular, nos interesará el concepto de límite.

Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ está *acotada superiormente* (*inferiormente*) si existe $K \in \mathbb{R}$ de forma tal que $a_n < K$ ($a_n > K$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1. Demostrar que si una sucesión esta acotada superiormente, entonces el conjunto de puntos de aglomeración de la sucesión (H_a) está acotado superiormente.

Definición 3. Dada una sucesión $\{a_n\}$ y H_a el conjunto de sus puntos de aglomeración llamamos *límite superior* de la sucesión $\{a_n\}$ como:

$$\overline{\lim} a_n = \begin{cases} sup H_a & si\ H_a \neq \emptyset\ y\ acotado\ superiormente \\ +\infty & si\ H_a\ no\ acotado\ superiormente \\ -\infty & si\ no\ se\ cumplen\ los\ anteriores \end{cases}$$

Análogamente, definimos límite inferior, cambiando: supremo por infimo, $+\infty$ por $-\infty$ y acotado superiormente por acotado inferiormente. La notación es $\underline{\lim} a_n$.

Una pregunta natural es si el limite superior de una sucesión es punto de aglomeración (en caso que este acotada).

Proposición 2. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada, entonces, $\overline{\lim} a_n \in H_a$.*

Demostración. Si la sucesión es acotada, entonces $\overline{\lim} a_n = sup H_a = h$. Vamos a probar que h es punto de aglomeración.

Sea $\varepsilon > 0$, como h es el supremo de H_a, existe $x \in H_a \cap (h-\varepsilon, h]$. Consideremos $\varepsilon > \delta > 0$ de forma tal que $h - \varepsilon < x - \delta < x < x + \delta < h + \varepsilon$. Como x es de aglomeración, hay infinitos términos de la sucesión que caen en el intervalo $(x-\delta, x+\delta)$, por lo tanto caen en $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$ completando la prueba. □

Estamos entonces en condiciones de definir el límite de una sucesión.

Definición 4. Dada una sucesión $\{a_n\}$ decimos que tiene límite $L \in \mathbb{R}$ si se cumple que $L = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ y decimos que $L = \lim a_n$.

Vamos a estudiar un caso en el cual podemos asegurar que una sucesión tiene límite.

Definición 5. Una sucesión $\{a_n\}$ es *monótona creciente* (*decreciente*) si $n < m$ implica $a_n \leq a_m$ ($a_n \geq a_m$).

Teorema 3. *Una sucesión monotona creciente y acotada superiormente tiene límite.*

Demostración. Si una sucesión es monotona creciente, es fácil ver que a_1 es cota inferior de la sucesión, con lo cual la sucesión es acotada inferiormente, por lo tanto, el teorema quedará probado si probamos que la sucesión tiene uno y solo un punto de aglomeración.

Nuestro candidato a punto de aglomeración es $L = sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. que existe gracias al axioma de completitud (esto es muy importante, ya que si no tuviesemos dicho axioma, el teorema no serÃa cierto, de hecho, es falso en los racionales, queda como ejercicio encontrar una sucesión creciente acotada superiormente de racionales que no converje a ningún racional).

Para probar que es punto de aglomeración, consideramos $\varepsilon > 0$ y por ser L supremo, se cumple que $\exists n$ tal que $L - \varepsilon < a_n \leq L$. Como $\forall m \geq n$, $a_m \geq a_n$ (por ser monótona creciente) y además L es cota superior de la sucesión, se cumple que $L - \varepsilon < a_m \leq L \ \forall m \geq n$.

Acabamos de probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n > 0$ de forma tal que para todo $m > n$ se cumple que $L - \varepsilon < a_m \leq L$.

Esto implica que L es de aglomeración ya que existen infinitos valores de m mayores que n.

Al mismo tiempo, si $x \neq L$, veremos que no puede ser de aglomeración ya que si consideramos $\varepsilon = \frac{|L-x|}{2}$ entonces es fácil probar que sólo puede haber finitos terminos de la sucesión en $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ (vimos que a partir de un momento la sucesión está "cerca" de L, en particular, "lejos" de x). □

Otra cosa que aún no sabemos es si necesariamente una sucesión tiene que tener puntos de aglomeración. Para probar que si, lo que haremos es utilizar el resultado anterior, pero antes necesitamos algunas definiciones.

Definición 6. Una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de la forma:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_j}, \ldots\ldots$$

donde $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_j < \ldots\ldots$

Lema 4. *Toda sucesión contiene una subsucesión monótona creciente o una subsucesión monotona decreciente.*

Demostración. Supongamos que la sucesión no tiene ninguna subsucesión decreciente.

Probemos entonces que existe $n \in N$ de forma tal que $a_n \leq a_m \ \forall n \in \mathbb{N}$. Si no fuese asi, dado que todo conjunto finito tiene mínimo, se debería cumplir que para todo $n > 0$, existe $m > n$ tal que $a_m < a_n$ (si no fuese asi, el más chico del conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cumpliría lo deseado). A partir de esto, es sencillo construir una subsucesión decreciente de la siguiente manera: Tomamos $a_{n_1} = a_1$. Luego a_{n_2} será un valor de forma tal que $a_{n_2} < a_{n_1}$ (por el comentario hecho anteriormente). Ahora, una vez que construimos el término a_{n_k}, de esta misma forma podremos construir el término $a_{n_{k+1}}$ con lo cual inductivamente construimos una subsucesión decreciente.

Ahora, probado lo anterior, vamos a construir una subsucesión creciente. Vimos que existe $a_n \leq a_m \ \forall m \in \mathbb{N}$, entonces, consideramos $a_{n_1} = a_n$. Ahora, lo que hacemos es tomar como a_{n_2} al valor mínimo a partir de n (por el mismo argumento que arriba va a existir) y así sucesivamente. □

Teorema 5 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene puntos de aglomeración.*

Demostración. Esto es un corolario del Lema y Teorema anterior. Si se tiene una sucesión acotada, el Lema anterior asegura que hay una subsucesión creciente o una decreciente. Como la sucesión está acotada (por ende la subsucesión también) el Teorema anterior nos asegura que la subsucesión tiene límite. Basta entonces ver que los puntos de aglomeración son los límites de las subsucesiones, cosa que demostraremos aparte por tener interés en si mismo. □

Proposición 6. *$x \in H_a$ si y solo si existe una subsucesión $\{a_{n_j}\}$ de $\{a_n\}$ tal que* $\lim a_{n_j} = x$.

Demostración. ($\Rightarrow$) La idea ya fue utilizada varias veces. Sea $\varepsilon_1 = 1$ entonces existe n_1 de forma tal que $a_{n_1} \in (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$. Ahora consideramos $\varepsilon_2 = 1/2$ y $n_2 > n_1$ de forma tal que $a_{n_2} \in (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2)$ (observar que estos valores existen por la definición de punto de aglomeración). Sucesivamente, consideramos $\varepsilon_k = 1/k$ y $n_k > n_{k-1}$ de forma tal que $a_{n_k} \in (x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k)$ construyendo la subsucesión deseada (verificar que x es el único punto de aglomeración de $\{a_{n_j}\}$.

($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$ y $n_0 > 0$, como x es punto de aglomeración de la subsucesión $\{a_{n_j}\}$ (es de hecho el límite) existe $J > n_0$ de forma tal que $a_{n_J} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Pero es fácil ver, dado que

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_J < \ldots$$

que $n_J \geq J > n_0$ y por lo tanto, $x \in H_a$.

□

Ahora estamos en condiciones de dar una equivalencia de la definición de límite que será la más utilizada en adelante.

Teorema 7. *Sea $\{a_n\}$ sucesión. $L \in \mathbb{R}$ es límite de $\{a_n\}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe n_0 de forma tal que para todo $n > n_0$ se cumple que $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por ser $L \in \mathbb{R}$ límite de la sucesión a_n se cumple que la sucesión debe estar acotada (revisar la definición de límite!). Por lo tanto, supongamos que existe un ε para el cual no se cumple lo deseado, es decir, para todo n_0 existe $m > n_0$ tal que $a_m \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Con lo cual podemos construir una subsucesión a_{n_j} de puntos que no están en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ (la construcción es idéntica a construcciones ya hechas en demostraciones anteriores). Como la sucesión está acotada, también lo está la subsucesión, por lo tanto, por el teorema de Bolzano Weierstrass, debe tener puntos de aglomeración y claramente L no puede ser uno de ellos, con lo cual llegamos a un absurdo pues encontramos puntos de aglomeración de a_n diferentes de L y por lo tanto L no podría ser el límite.

($\Leftarrow$) Es inmediato ver que L tiene que ser punto de aglomeración de a_n (haganlo!!) y como la sucesión está acotada (esto se ve ya que a partir de un momento estÃ¡ cerca de L y en el resto de los valores va a tener un máximo y un mínimo) para completar la prueba basta ver que no hay otros puntos de aglomeración reales.

Sea $x \neq L$, entonces, considerando nuevamente $\varepsilon = \frac{|L-x|}{2}$ podemos observar que a partir de un momento la sucesión nunca entrará en el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ probando que x no es de aglomeración.

□

Para terminar estas notas vamos a introducir un concepto que tiene que ver fuertemente con la completitud de los números reales, las sucesiones de Cauchy.

Definición 7. Decimos que una sucesión es una *sucesión de Cauchy* siempre que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 de forma tal que para todos $n, m > n_0$ se cumple que $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

De alguna manera, la definición nos dice que la sucesión en el "infinito" se va apretando sobre si misma. Parece razonable esperar que cuando una sucesión tiene ese comportamiento tenga límite, lo cual va a ser cierto, pero de nuevo apoyandose fuertemente en el Axioma de Completitud. La ventaja de esto, es que ahora, para probar que una sucesión tiene límite no va a ser necesario tener un candidato, simplemente verificar la condición de arriba (capaz aun esto no resulta muy importante, pero vamos a ver durante el curso que si lo es!).

Teorema 8. *Una sucesión tiene límite si y solo si es de Cauchy.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Para ver que es de Cauchy, sea L el límite de a_n. Tomemos $\varepsilon > 0$, entonces, sabemos que existe un $n_0 > 0$ de forma tal que para todo $n > n_0$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon/2$ (utilizando el teorema de caracterización de limite con el valor $\varepsilon/2$). Ahora, si $n, m > n_0$ se cumple que

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_m + L - L| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Primero observamos que una sucesión de Cauchy está acotada (queda como ejercicio!). Ahora sabemos que entonces tiene un punto de aglomeración por el Teorema de Bolzano Weierstrass (recordar que este teorema hace uso del Axioma de Completitud). Veamos que es único.

Supongamos que $x \neq y$ son puntos de aglomeración. Tomamos $\varepsilon = \frac{|x-y|}{4}$. Sea n_0 de forma tal que si $n, m > n_0$ se cumple que $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Ahora, como x es de aglomeración, existe $N > n_0$ de forma tal que $|a_N - x| < \varepsilon$. Entonces, $\forall n > n_0$ se cumple que $|a_n - a_N| < \varepsilon$ con lo cual $|a_n - x| \leq |a_N - x| + |a_N - a_n| < 2\varepsilon$. Con lo cual a partir de n_0 la sucesión no entra en $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ (hacer un dibujo donde aparezcan x, y y los entornos de tamaño ε y 2ε de estos). □

Para terminar vamos a ver la prueba de un teorema que habíamos pospuesto:

Teorema 9. *Una expresión decimal define uno y solo un número real*

Demostración. Sea $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ una expresión decimal de un número real. Veamos que la sucesión

$$b_j = 0, a_1 a_2 \ldots a_j$$

es una sucesión de Cauchy. Esto es simple pues dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 de forma tal que todo número cuya expresión decimal tiene en sus primeros n_0 terminos ceros, es menor que ε por lo cual $\forall n, m \geq n_0$ se cumple que $b_n - b_m$ tiene en sus primeros n_0 términos ceros y por lo tanto la sucesión es de Cauchy. □

Notas realizadas por Rafael Potrie como complemento a lo dado en el teórico 6 de Cálculo 1 de 2008. La idea es que esto permita no atrasarnos. Las notas se basan fundamentalmente en el Libro de Spivak (Capítulo 21), con las modificaciones hechas en clase, NO DEJEN DE LEER EL LIBRO!. Las demostraciones están hechas de forma que deberían seguirlas con hoja y lápiz en mano pues algunos argumentos pueden ser difíciles de entender en una primera lectura.