Triángulos

6 de septiembre de 2006

Construcción

El espacio de trabajo es $T_1(S^2\backslash\{a,b,c\})$ que también se puede pensar como $(S^2\backslash\{a,b,c\})\times S^1$ (por una propiedad de los fibrados que no tengo idea cual es pero me la creo) y vamos a tomar ahi la distancia producto (máximo entre las 2).

Básicamente, la construcción sería asi:

Las cartas a considerar son $\varphi_1, \varphi_2 y \varphi_3$ de forma tal de que $\varphi_i : T\cup T_i\cup l_i \to S^2\backslash s_i$ donde T es el interior del triángulo y T_i es el triángulo T simétrizado respecto del lado l_i (ver figura 1) y donde s_i son trozos homeomorfos a curvas (en este caso van a ser los dos lados restantes en $\varphi_i(T)$). Se puede hacer la construcción con el cuidado necesario para que el cambio de cartas se la identidad en T y una isometría entre los T_i. De esta manera, se le induce a $S^2\backslash a,b,c$ una métrica plana no completa. Además, es sencillo observar como el flujo geodesico, se corresponde mediante la proyección sobre T con el flujo del billar en el triángulo.

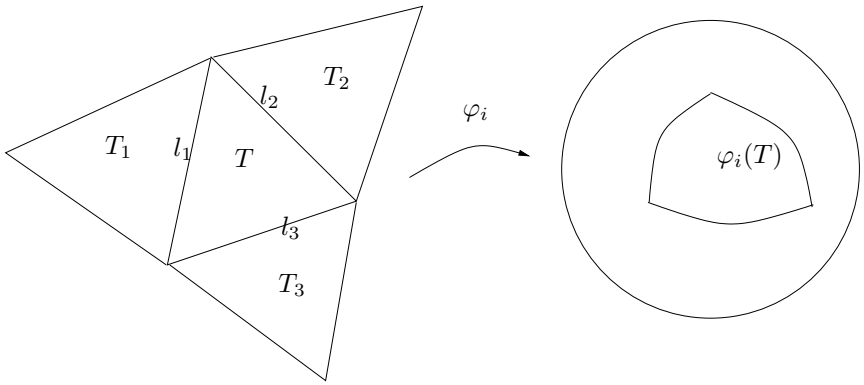


Figura 1: Cartas locales del espacio de estados

Expansividad y sus diversas definiciones

Hay diferentes formas de definir la expansividad para un flujo. La noción más común, es la introducida en Bowen-Walters que se le llama $C-$ expansividad. Allí, se prueba que en ciertos casos esa noción es equivalente a una noción más fuerte llamada $K-$ expansividad. De hecho, se puede probar que en general resultan equivalentes.

Sea $C = \{s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{continua y } s(0) = 0\}$ y sea $K = \{s \in C : s \text{ homeo creciente}\}$. Entonces, decimos que φ_t flujo en M (espacio métrico) es $C-$expansivo (resp. $K-$expansivo) sii $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que si se cumple que $d(\varphi_t(x), \varphi_{s(t)}(y)) < \delta$ $\forall t \in \mathbb{R}$ y para alguna $s \in C$ (resp $s \in K$) entonces, se cumple que $y = \varphi_t(x)$ con $|t| < \varepsilon$.

Esta noción de expansividad, es (pienso) artificial, pues básicamente, se basa en que siendo la variedad compacta la velocidad esta acotada, y en el caso sin singularidades (que es lo único posible pues se puede probar que si M conexo y φ expansivo entonces no hay puntos fijos) también lejos de 0 y por lo tanto, la definición que se da es simplemente decir que es expansivo sii no tiene singularidades y además, dos orbitas distintas tienen una separación geométrica mayor a un cierto valor para cualquier dos orbitas distintas.

Teniendo en cuenta eso, creo razonable, dar una definición de expansividad eliminando la restricción de no tener singularidades (de hecho, con la definición anterior, flujos cuyo tiempo uno es expansivo no serían expansivos, por ejemplo el flujo de $\dot{x} = Ax$ donde A no tiene valores propios con parte real 0). La definición que usaremos es la de Komuro.

Definición 1. Un flujo φ es K^*- expansivo sii $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que si se cumple que $d(\varphi_t(x), \varphi_{s(t)}(y)) < \delta\ \forall t \in \mathbb{R}$ y para alguna $s \in K$ entonces, se cumple que $\varphi_{s(t_0)}(y) = \varphi_{t_0+t}(x)$ con $|t| < \varepsilon$.

Esta definición, es por lo comentado antes, más adecuada (opinión personal) y permite aplicarse en casos donde existen singularidades. De todas maneras, la definición es equivalente en el caso que no hayan y la idea es que fuera de entornos de las singularidades el campo también estara acotdo lejos del cero.

Observación 1. Tiene sentido hablar de una constante de expansividad α pues fijando el ε en la definición, tenemos un α de forma de que si nos mantenemos a menos de α entonces estamos en la misma orbita. Con este valor de α entonces, ya aseguramos eso, pero si quisieramos estar más cerca en la orbita tendriamos que elegir un valor menor de α. Eso se puede solucionar diciendo que si la distancia en la "componente" transversal al flujo se mantiene menor a α en todo momento, entonces es el mismo punto.

La idea ahora es probar el siguiente teorema:

Teorema 1. *Si φ es expansivo entonces no tiene puntos estables según Lyapunov.*

Antes, veamos el siguiente Lema.

Lema 2. *Si φ es expansivo y x estable según Lyapunov entonces $\exists\sigma$ y $\exists N > 0$ tal que $forall t > N$ se cumple que $\varphi_\nu(B_\sigma(\varphi_{-t}(x))) \subset B_\delta(\varphi_{\nu-t}(x))$ donde δ es de la estabilidad según Lyapunov para ε menor que la constante de expansividad.*

Demostración. Si no fuera asi, tendríamos que $\forall\sigma_n = \frac{1}{n}$ existiría $l_n \in [0,n]$ y $y_n \in B_{\sigma_n}(\varphi_{-n}(x))$ de forma tal que $d(\varphi_{l_n-n}(x), \varphi_{l_n}(y_n)) > \delta$.

Consideremos $\gamma : [0,1] \to B_{\sigma_n}(\varphi_{-n}(x))$ que una x con y_n y $t_n = \sup\{t \in [0,1] : \varphi_s(\gamma(t)) \in B_\delta(\varphi_{s-n}(x)) \ \forall s \in [0,n]\}$

Llamemosle z_n a $\varphi_{l'_n}(\gamma(t_n))$ tal que $d(z_n, \varphi_{l'_n-n}(x)) = \delta$ (y le llamamos x_n a $\varphi_{l'_n-n}(x)$). Entonces, se cumple que por un lado, $d(\varphi_t(z_n), \varphi_t(x_n)) \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ y además, dado que $\sigma_n \to 0$ que $l'_n \to +\infty$ por la continuidad del flujo.

Si consideramos z, w puntos límite (con subsucesiones con iguales subindices) de las sucesiones z_n, x_n tenemos que se cumplirá que $d(\varphi_t(z), \varphi_t(w)) \leq \varepsilon$ y esto $\forall t \in \mathbb{R}$. Esto es cierto pues si fijamos $t \in \mathbb{R}$, tenemos que existe n_0 tal que $t + l'_n > 0 \ \forall n > n_0$ y por lo tanto $d(\varphi_{t+l'_n}(\gamma(t_n)), \varphi_{t+l'_n-n}(x)) < \varepsilon \ \forall n > n_0$. Esto estaría indicando que z está en la orbita cercana a la de w (esto independientemente de la K o K^* expansividad pues en este caso la reparametrización es trivial).

Esto no puede pasar ya que podemos considerar que el punto z_n está a distancia $\delta/2$ de x_n en su "proyección" a la dirección transversal al flujo. (??)

□

Probemos también este lema:

Lema 3. *Si φ es expansivo entonces los puntos estables son asintóticamente estables.*

Demostración. VER!!!!! Si no fuese así,..... paye... hay que ver bien que es asintóticamente estable, porque los que estan en la orbita, a no ser que vaya a una singularidad no se van a acercar. □

Expansividad en el triángulo

Voy a "demostrar" un par de afirmaciones que darian una especie de expansividad. Estaría bueno ver si se entienden sin dibujos agregados lo que implicaría que no está tan mal la demostración. La demostración no está del todo pulida, pero están todas las ideas que rejunte y creo que a partir de eso podemos armar una demostración.

Proposición 4. *Supongamos que existe $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y monótona creciente (con $\tau(0) = 0$) tal que $d(\phi_t(x), \phi_{\tau(t)}(y)) < \alpha \ \forall t \in \mathbb{R}^+$ entonces pasa una de las siguientes:*

1. *$\exists K$ que depende sólo del triángulo tal que $\alpha > K$.*
2. *x, y están en la misma orbita.*
3. *alguna muere en un vertice.*

Demostración. Supongamos que no pasa ni *2.* ni *3.*.

Por no estar en la misma orbita el itinerario futuro es distinto (trabeltosky). Al reparametrizar no perdemos esta propiedad.

Hay 2 opciones, o el momento en que chocan en distinto lugar es cercano al vertice o no.

Si es cercano al vértice (digamos a distancia $\varepsilon < \alpha$) entonces el que choque primero (teniendo en cuenta la reparametrización) va a tener un "salto" en su posición en S^1

Si el punto de choque es a más de ε del vertice, entonces, sea t_1 el tiempo en el cual $\phi_t(x)$ choca o $\phi_{\tau(t)}(y)$ (el primer tiempo) como el otro todavía no llego pero está llendo a otro vertice, tenemos que la distancia en ese instante

es mayor a ε (es una recta que va a otro lado y la longitud en ese punto no es mucha porque en t_1 no está lejos de la otra).

□

Proposición 5. *Si pasa 2. entonces en algún momento estan en el mismo dominio fundamental.*

Demostración. Es medio trivial porque te paras en un cruce no muy cercano a un vertice y te fijas en el dominio fundamental alrededor y tienen que estar ahi porque $d(\phi_t(x), \phi_{\tau(t)}(y)) < \alpha$.

□

Proposición 6. *Si pasa 3. entonces si no estas en la misma orbita en algun momento se alejan abundante (suponiendo que pones chichones).*

Demostración. Te tomas un tiempo tal que $\phi_t(x)$ este bien cerca del vertice y que se vaya a quedar ahi. Entonces, cuando el otro (independientemente que tenga reparametrización o no) toque en algun momento el lado opuesto al vertice, o muera en otro vertice entonces va a estar lejos.

□