HIPERBOLICITE PARTIELLE ET DYNAMIQUE PSEUDO ANOSOV

(exposee en presque français, basee en travails communs avec T. Barthelme, S. Fenley et S. Frankel)

But de l'exposee: Expliquer un peu sur le role de la "dynamique grossiere" dans l'etude des diffeos partiellement hyperboliques en 3-varietés.

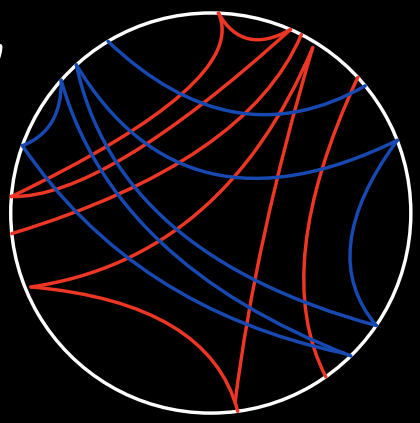
§ DIFFEOS PSEUDO ANOSOV DES SURFACES

(Handel, Thurston, Nielsen, ...)

$f: S \to S$ homeo de surface fermée de genre ≥ 2.
est PSEUDO-ANOSOV si il n'a pas des clases d'isotopie des courves fermees simples que soient periodiques par f.

Consequence: Dans $\tilde{S} \simeq \mathbb{H}^2$, $\exists\ \Lambda^s, \Lambda^u$ laminations geodesiques transverses

tq: 1) $\pi_1(S)$-invariantes (minimales en proj)
2) $\tilde{f}$ relève de f les "preserve" (a moins de distance bornee) et
contracte feuilles de Λ^s
dilatee feuilles de Λ^u



Conséquences dynamiques :

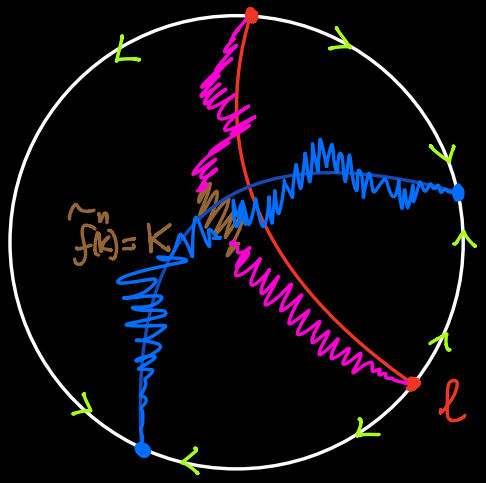
1) $h_{top}(f) > h_0 > 0$ avec h_0 dépend que de la classe d'homotopie de f.

2) infinité des points périodiques :

↳ en fait : étant donnée $\ell \in \Lambda^s$ (resp. $\ell' \in \Lambda^u$)

$\exists\, n > 0$ et $\tilde{f}$ relève de f tq

$\tilde{f}^n$ a un "compact" fixe tq son "variété stable" est "proche" de ℓ.



§ 3-VARIÉTÉES HIPERBOLIQUES

On veux etudier certes diffeos de 3-varietes hyperboliques.

M serait un 3-variete fermee (i.e. compact sans bord)

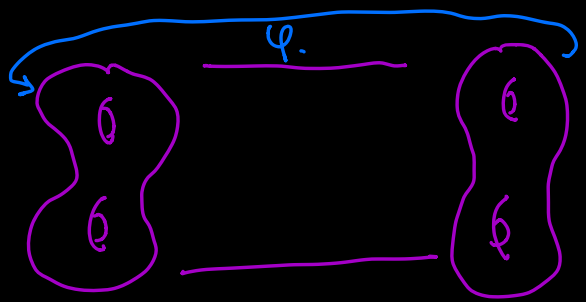
M est hyperbolique s'il $\exists\ \Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) \simeq PSL_2\mathbb{C}$ (discret)
tq $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$

Thm : $\exists$ des varietes hyperboliques (ce n'est pas triviale)

Thm : (Thurston) "Presque tout" 3-variete fermée est hyperbolique.

Thm (Perelman) Si $\pi_1(M) \neq \mathbb{Z}^2$ (atoroidal) est infini (aesferique) et $\pi_2(M) = \{0\}$
$\Rightarrow$ M est hyperbolique.

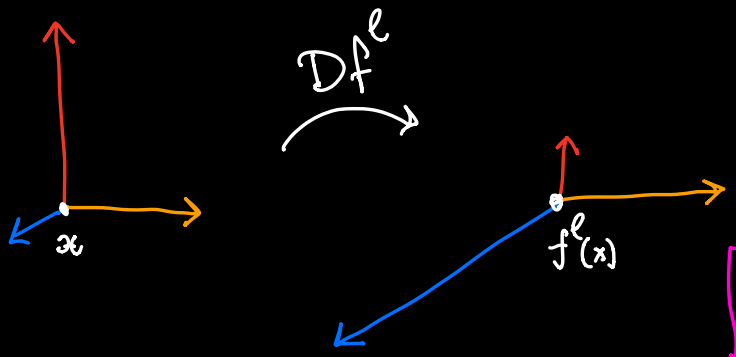
(de plus ; Thm (Agol) tout 3-variete hyperbolique fermée admet un revêtement fini tq $M = S \times [0,1]/\sim$
avec $(x,0) \sim (\varphi(x),1)$ et φ est pseudo Anosov)



§ DIFFEOS PARTIELLEMENT HYPERBOLIQUES

Def : $f : M \to M$ est partiellement hyperbolique s'il $\exists$ décomp. $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ Df-invariante (continue) et $\ell > 0$ tq $\forall x \in M$ $\forall v^\sigma \in E^\sigma_x$ unitaire $(\sigma = s, c, u)$ on a

* $\|Df^\ell v^s\| < \|Df^\ell v^c\| < \|Df^\ell v^u\|$
* $\|Df^\ell v^s\| < 1 < \|Df^\ell v^u\|$



* Disclaimer : Je vais me concentrer dans M hyperbolique. Ça me fait ignorer des exemples et résultats. Voir survey avec Hammerlindl ETDS 2018

Exemples : (*)

1) flots d'Anosov : $\Phi_t : M \to M$ flot tq $\Phi_1 : M \to M$ est partiellement hyperbolique

2) perturbations : être partiellement hyperbolique est un propriété ouvert en top C^1 (champs des cônes)

3) "permutations des feuilles" soit $\Phi_t : M \to M$ flot d'Anosov et $\pi : \hat{M} \to M$ revetement fini. Si β transf de rév. $\Rightarrow f = \beta \circ \hat{\Phi}_t$ est P.H.

Q'ques mots sur les flots d'Anosov en 3-variétés hyperboliques :

1) Construites par des chirurgies : Goodman, Fried, Fenley, Foulon-Hasselblatt, ...

2) Mal compris : Quelles 3-variétés hyperboliques admettent ? Combien différents ?
Roberts-Shareshian-Stein, Calegari-Dunfield, Bowden Mann, Yu, ...

Def : Soit $\phi_t : M \to M$ un flot d'Anosov, un **auto-équivalence orbitale** de ϕ_t est $\beta : M \to M$ homéomorphisme qui envoye orbites de ϕ_t dans des orbites de ϕ_t

(plus précis : $\exists\, s : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\forall x \in M$ $s(x,\cdot)$ homéo croissant tq $\beta(\phi_t(x)) = \phi_{s(x,t)}(\beta(x))$)

(**Note :** Si β fixe tous les orbites de ϕ_t on dit que β est un "reparametrization" de ϕ_t ; i.e. $\exists\, \tau : M \to \mathbb{R}$ variable continue tq $\beta(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$)

Def : Un difféo partiellement hyperbolique $f : M \to M$ est dit un flot d'Anosov collapsée s'il $\exists\, \phi_t : M \to M$ flot d'Anosov, $\beta : M \to M$ auto-equivalence et $h : M \to M$ continue et $h \sim id$ ($\Rightarrow$ surjective) tq :

1) h semi conjugue f et β :

$$h \circ \beta = f \circ h$$

2) h envoye les orbites de ϕ_t dans des courbes tangents a E^c

Theorème (avec S. Fenley) Soit $f : M \to M$ un difféo partiellement hyperbolique d'un 3-variété hyperbolique $\Rightarrow$ f est un flot d'Anosov collapsée.

Corolaire : Si M variétée hyperbolique admet un difféo partiellement hyperbolique $\Rightarrow$ elle admet un flot d'Anosov.

§ STRUCTURE DE LA PREUVE (pour revenir à la dynamique grossière)

(I) Quite à prendre un revetement fini et itérée de f on peut supposer : (note : les énoncés ne sont pas quite à itérée et revetement mais je ne vais pas parler de ça aujourd'hui)

(1) (Mostow) $f \sim id$ (utilise M hyp. mais si on suppose ça, la plus part de (I) et (II) est encore valable)

(2) Df preserve orientation de E^s, E^c, E^u. ($E^{cu} = E^c \oplus E^u$, $E^{cs} = E^s \oplus E^c$)

⇓

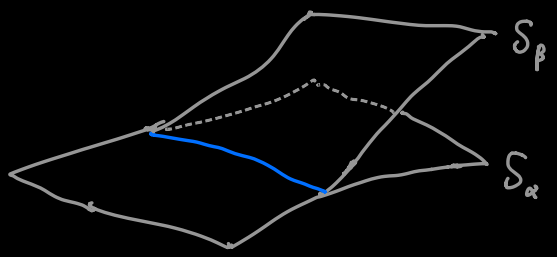
(3) (Burago-Ivanov) $\exists$ feuilletages "branchées" f-invariante $\mathcal{F}^{cs}$ et $\mathcal{F}^{cu}$ tg respectivement à E^{cs}, E^{cu}

↳ plus precis : $\mathcal{F}$ est feuilletage "branchée" (f-inv) si c'est un collection de surfaces immersées $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tq si on regarde $\widetilde{\mathcal{F}}$ dans $\widetilde{M}$ on a un collection $\{\widetilde{S}_\alpha\}_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}}$ des plans plongées tq :

(i) $\pi_1(M)$ et $\widetilde{f}$-invariantes
(i.e $\forall \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}$ et $g \in \langle \pi_1(M), \widetilde{f} \rangle$ $\exists \beta \in \widetilde{\mathcal{A}}$ tq $g(\widetilde{S}_\alpha) = \widetilde{S}_\beta$)

(ii) $\forall x \in \widetilde{M}$ $\exists \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}$ tq $x \in \widetilde{S}_\alpha$.

(iii) $\forall \alpha \neq \beta \in \widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{S}_\alpha$ et $\widetilde{S}_\beta$ ne se croisent pas
(i.e. $\widetilde{S}_\beta$ n'intersecte l'un des composantes de $\widetilde{M} \setminus \widetilde{S}_\alpha$)



Come $f \sim id$ on peut choisir un bon revêtement $\tilde{f} : \tilde{M} \to \tilde{M}$

tq (1) $d(\tilde{f}, id) < K$
(2) $\tilde{f}$ commute avec $\pi_1(M)$

} équivalentes (et si M hyperbolique, c'est unique)

(II) Dichotomie pour la dynamique des feuilles
(avec Barthelme, Fenley et Frankel)

Thm : Dans ces conditions il y a 2 possibilitées; soit

(1) $\tilde{f}$ fixe tous les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$, $\tilde{\mathcal{F}}^{cu}$
(double invariance, dans ce cas on montre que $\tilde{f}$ est flot d'Anosov collapsee), ou

(2) $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^{cu}$ sont des feuilletages uniformes (les feuilles sont 2 a 2 a distance Hsdff borne) et $\tilde{f}$ est un translation dans l'espace des feuilles de chaqun.

(**Note**: Un version de ce theoreme est valable en generale pour $f : M \to M$ p.R. $\sim id$ d'un 3 variétte fermée)

Rmk: Ca ne dit rien (dans le cas 2) sur la structure des intersections des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^{cu}$ qui c'est ce qu'on veux comprendre pour voir que f est un flot d'An. collap

III LA DYNAMIQUE GROSSIÈRE

Ici, le fait que M est hyperbolique devient plus important (pour ce que je vais raconter, il suffit que M contient un piece atoroidal dans son decomposition JSJ)

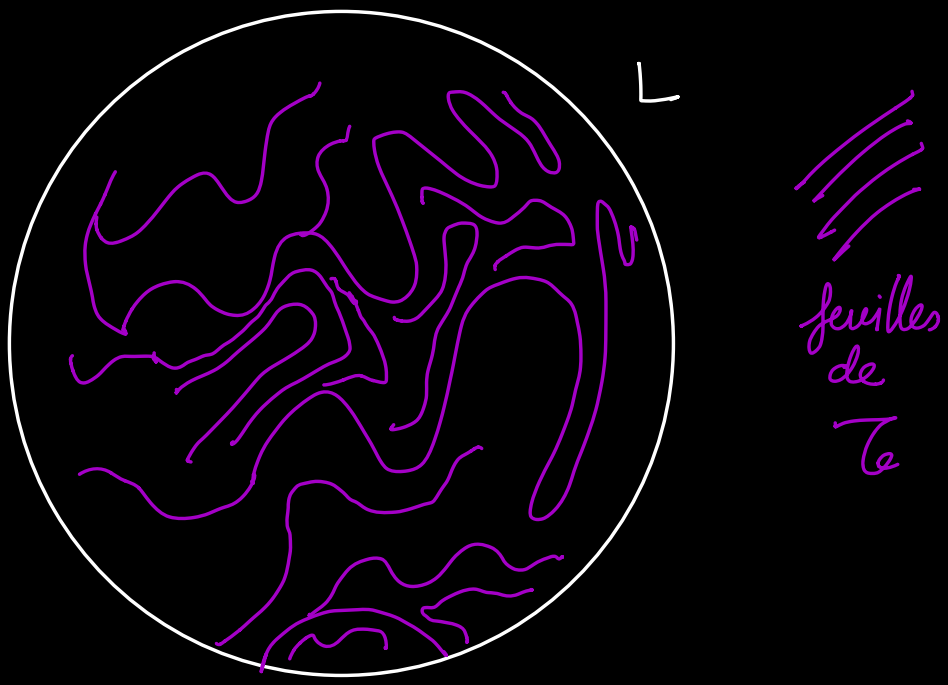
Thm (Thurston, Calegari, Fenley) Soit M un 3-variété hyperbolique et $\mathcal{F}$ un feuilletage uniforme en M, alors, $\exists\ \Psi_t : M \to M$ un flot pseudo-Anosov transverse et regulant pour $\mathcal{F}$.

↳ dans $\tilde{M}$ si L_1, L_2 sont des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ alors $\exists\ K := K(L_1, L_2)$ tq $L_2 \subseteq \tilde{\Psi}_{[-K,K]}(L_1)$

↳ c'est un analogue de classif de Nielsen-Thurston (qui represent le cas $\mathcal{F} = \{\{t\} \times S\}_{t \in [0,1)}$ dans $M = [0,1] \times S/\sim$

La question devient : Soit $f : M \to M$ homeo qui preserve un feuilletage (bornbee) uniforme $\mathcal{F}$ et tq chaque feuille $L \in \mathcal{F}$ admet un sous feuilletage (branchee) aussi invariante $\mathcal{G}$. Peut on dire des choses sur $\mathcal{G}$?

les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ s'identifient avec $\mathbb{H}^2$.



Premier remarque: Si L, L' sont des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ alors on peut définir $\Phi_{L,L'}(x) = \Psi_{t(x)}(x)$ tq $t(x)$ est le seul $t \in \mathbb{R}$ tq $\Psi_t(x) \cap L' \neq \emptyset$

Donc: Si $\tilde{f} : L \longrightarrow \tilde{f}(L)$ on sait que

$$d(\tilde{f}|_L, \Phi_{L,\tilde{f}(L)}) < K \text{ uniforme.}$$

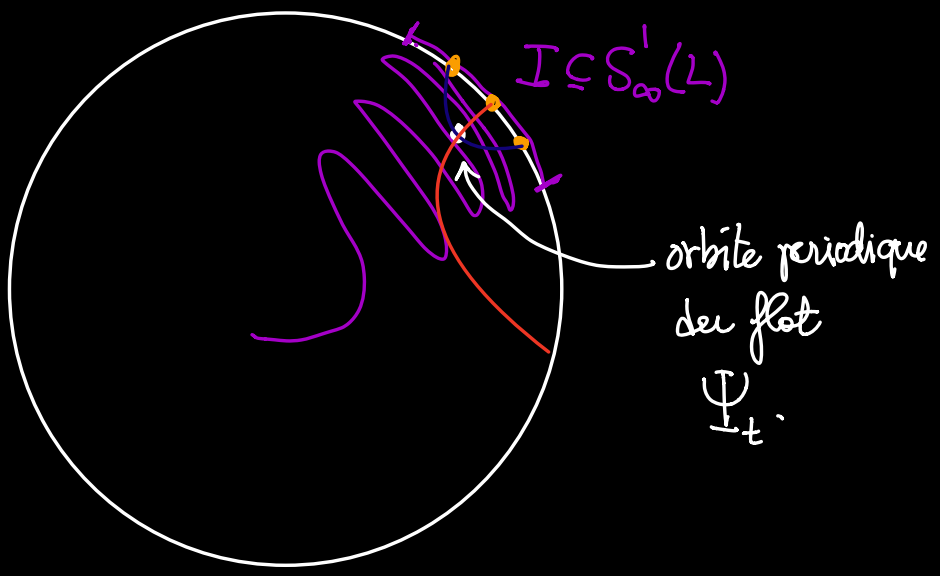
et $\Phi_{L,\tilde{f}(L)}$ est comme un relève d'un homeo pseudo-Anosov

Je vais essayer d'illustrer l'utilité de ça avec un exemple:

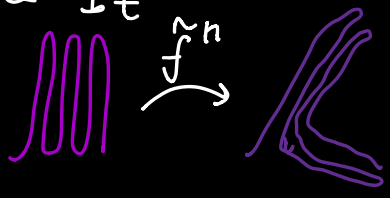
Prop: Soit $L \in \mathcal{F}$ et $\ell \in \mathcal{T}$ dans L, alors la courbe ℓ se compactifie en $L \cup S^1_\infty(L)$

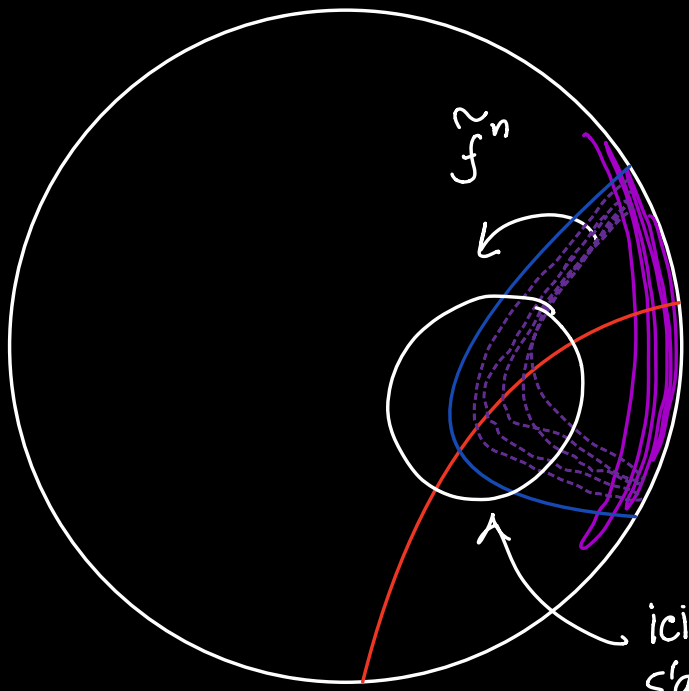
idée de la preuve:

Supposons que ce n'est pas le cas:



l'idée c'est que si on applique $\tilde{f}$ plusieurs fois, ça va se ressembler à la dynamique de Ψ_t donc va pousser les feuilles





ici on ne peut pas s'accumuler car c'est un feuilletage.