

PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS & FOLIACIONES TRANSVERSALES

- M variedad cerrada de dimensión 3 (compacta, conexa, sin borde)

- $f: M \rightarrow M$ difeo parcialmente hiperbólico:

$$TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u \quad \text{desc. } Df\text{-invariante}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 contrae dominado expande
 en fibrados de dimensión 1.

Pujals (2001) - (Bonatti-Wilkinson)

Si $f: M \rightarrow M$ es PH transitivo $\Rightarrow$ (a menos de cubr. finito e iterado)

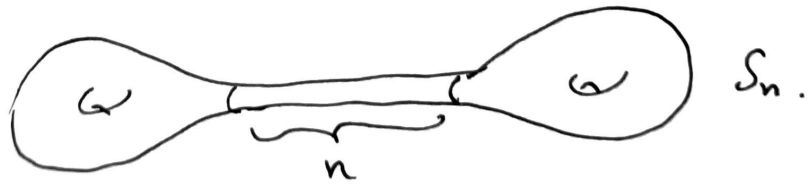
es "equivale" a $\bullet$:

- $\rightarrow$ lineal Anosov en T^3 (DA)
- $\rightarrow$ skew-product (sobre Anosov en T^2)
- $\rightarrow$ flujo de Anosov disutilizado.

$\rightarrow$ con Hammerlindl (2013): cierto si $\pi_1(M)$ virt. soluble.

$\rightarrow$ con Bonatti-Gogolev (2014): falso si $M = T^3$ (y otros ejemplos)

Idea: Miramos



métricas hiperbólicas en S_n con "cuello" fino

Con $n \rightarrow +\infty$ el dehn-twist se "acerc" a ser una isometría

Consideramos n -grande $\Rightarrow f(x) = \Phi_t \circ D_n \circ \Phi_t(x)$ con t grande

y f es PH (preserva volumen $\Rightarrow$ ergódico y trans. por part) y no es isotópico a la identidad

Junto a Barthelmé & Fenley (~2020)

encontramos una definición que "salva" la pregunta:

Def: $f: M \rightarrow M$ p.h. es un flujo de Anosov colapsado si

$\exists \varphi: M \rightarrow M$ flujo de Anosov

$\beta: M \rightarrow M$ auto-equivalencia orbital (= homeo que manda orbitas en orbitas)

tal que ~~$\exists$~~ $\exists h: M \rightarrow M$ continua y sobre tq

$$\boxed{f \circ h = h \circ \beta} \quad (+ \text{ alguna prop con la central})$$

Teorema (junto a S. Fenley) Sea $f: M \rightarrow M$ parcialmente hiperbólico recurrente por cadenas en M con $\pi_1(M)$ -exponencial (en part, no soluble simple) ($\Leftarrow$ transitivo)
 $\Rightarrow f$ es un flujo de Anosov colapsado.

Obs: $\rightarrow$ El resultado es más fuerte (hipótesis más débil - hojas GH-) y la conclusión tb (unicidad, etc...)

$\rightarrow$ Implica que M admite un flujo de Anosov.

$\rightarrow$ Lo sabíamos en M hiperbólica, $M=T^2$ y alguna clase de isotopía de Seifert.

Corolario (conjetura de HHU) Sea $f: M \rightarrow M$ PH que preserve volumen de 3 var. con $\pi_1(M)$ no soluble y de clase $C^{1+\alpha}$.

Entonces f es un K -systema ($\Rightarrow$ ergódico y mixing) [Res. con Fenley CAF $\Rightarrow$ acenible]

Punto de partida:

3

→ Borog Ivanov: foliaciones "branching" (ramificadas)

(construidas para mostrar que S^3 y otras variedades no admiten PH)

(fibrados + f)

[Teorema: Si $f: M \rightarrow S$ es PH orientable $\Rightarrow \exists W^{cs}$ y W^{cu}
foliaciones ramificadas invariantes que se pueden aproximar (explotar)
bien por foliaciones "casi" tangentes a E^{cs} y E^{cu} .
↳ F^{cs}, F^{cu}

Observación clave: No pueden tener componentes de Reeb.

Razón: Una componente de Reeb $\Rightarrow$ si F^u es foliación $\neq$
 $\Rightarrow$ tiene una hoja cerrada:



→ Junto a Barthelmé y Fenky probamos que para ser CAF

alcanza que: $\left[\begin{array}{l} \rightarrow F^{cs} \text{ y } F^{cu} \text{ sean por hojas Gromov hiperbólicas} \\ \rightarrow G = F^{cs} \cap F^{cu} \text{ es por quasi-geodésicas en} \\ \text{el cubrimiento de las hojas.} \end{array} \right.$

→ Con Fenky vimos que si F es minimal & $\pi_1(M)$ exponencial
 $\Rightarrow$ las hojas de F son Gromov hiperbólicas (corolario de Candel)

Consecuencia: Si f es rec. por cadenas $\Rightarrow F^{cs}, F^{cu}$ minimales $\Rightarrow$ OK.

(tb con Hamenstädt y Shannon: si M seifert $\Rightarrow$ tb GH ...
(posiblemente $f \sim id, DC, \dots$)

Entonces lo que buscamos es describir G :

4

Teorema (con Fenley)

Sean F_1, F_2 foliaciones π_1 por hojas Gromov hiperbólicas
(y $\pi_1(M)$ no soluble) $\Rightarrow$ si $G = F_1 \cap F_2$ se cumple que:

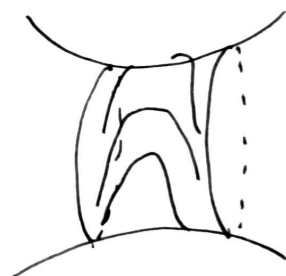
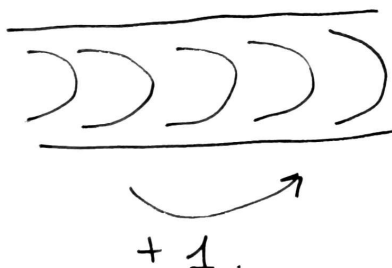
- 1) o bien G es $\mathbb{Q}G$ - en cada hoja o
- 2) G tiene una superficie de Reeb generalizada.

Corolario: En las hipótesis, G tiene hoja compacta ($5'$).

Superficie de Reeb generalizada

Anillo de Reeb:

(podría haber $Möbius$)



Corona de Reeb:



bordes
no separados



Obs: En ambos casos, si tienes un flujo transversal

$\Rightarrow$ hay una hoja cerrada $\Rightarrow$ incompatible con PH.

Consecuencia del Teo de foliaciones:

5

Teorema (con Fenley) Sea $f: M \rightarrow M$ que admite branching foliations (inv) por hojas Gromov hiperbólicas $\rightarrow$ es collapsed Anosov flow.

(Usando un resultado de unicidad se elimina necesidad de ir a cubrimiento finito: La unicidad tiene un corolario interesante - y quizás inesperado - si $f: M \rightarrow M$ p.h. transitivo en M con $\pi_1(M)$ exponencial $\rightarrow E^c$ es orientable)

Algunos comentarios sobre el teorema acerca de foliaciones transversas por hojas Gromov hiperbólicas.

Ejemplos: $\rightarrow$ en T'S (o casi cualquier flujo de Anosov) hay ejemplos de Matsumoto-Tsuboi que cumplen que en $\tilde{M}$ hay hojas $L \in \tilde{\mathcal{F}}_1, E \in \tilde{\mathcal{F}}_2$ tq $L \cap E$ tiene más de una comp. conexa. (Tienen anillos de Reeb)

$\rightarrow$ en variedades hiperbólicas, con Bonatti y Bowden construimos ejemplos de foliaciones (no minimales) que no se cortan en $\mathbb{Q}G$ pero tq $\forall L \in \tilde{\mathcal{F}}_1, E \in \tilde{\mathcal{F}}_2$ $L \cap E$ tiene a lo sumo 1 comp. conexa. (Tienen anillos de Reeb)

Según tiempo, se puede discutir estrategia o decir como se pone la prueba.