

Sean $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$

Matrices hipabólicas en posición general.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que si $v \in \mathbb{Q}^2$ entonces, si $\Gamma = \langle A, B \rangle$ grupo
se cumple que Γv es un conjunto finito.
(el denominador no cambia)

Si Γv es ~~no~~ finito entonces, $v \in \mathbb{Q}^2$

(lo hizo JF), de hecho, podemos suponer que

$$\gamma v = v + \underset{\text{con } n \in \mathbb{Z}^2}{\cancel{\mathbb{Z}}} n \quad \forall \gamma \in \Gamma' \text{ (de índice finito en } \Gamma)$$

y existe un tal γ tq $\gamma - \text{Id}$ es invertible

$$\text{entonces } \cancel{A} v = (\gamma - \text{Id})^{-1} n \in \mathbb{Q}^2.$$

Vamos a estudiar, e intentar mostrar, que la órbita de
 v con $v \notin \mathbb{Q}^2$ es densa en $\mathbb{T}^2$ por Γ .

Teorema (Guivarch-Stankov) Si $v \notin \mathbb{Q}^2 \rightarrow$ la órbita por Γ
de v es densa.

Queremos estudiar $\overline{\Gamma v}$ y mostrar que es todo. Para
eso, vamos a estudiar la acción de v en $\mathbb{R}^2$ y mostrar que

Contiene una recta irracional.

Consideramos $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y Γ subgrupo de matrices de $SL_2(\mathbb{R})$

tal que:

- 1) Γ contiene matrices hiperbólicas.
- 2) Γ fuertemente irreducible (no hay una flia finita de subespacios que es invariante)

Tenemos primero la acción de Γ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

Lema: Γ tiene un único minimal en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

dem: Toda órbita es infinita.

~~Supongamos~~ Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ minimal, entonces,
todo punto es de acumulación $\rightarrow$ es todo ($\Rightarrow$ único)
 $\rightarrow$ interior vacío $\Rightarrow$ Cantor.

Si es Cantor y Λ' es otro minimal $\Rightarrow d(\Lambda, \Lambda') > \varepsilon$.
entonces $\Lambda' \subseteq$ finitos gaps de $\Lambda +$ invariante
 $\Rightarrow$ contradice minimalidad de Λ . $\square$

Sea Λ el minimal y $\mathcal{L} = \mathbb{R}\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ el cono generado

Prop: La acción de Γ en $\mathcal{L}$ es transitiva (tiene órbitas densas)

dem: Consideramos abiertos U, V que podemos suponer cortan $\mathcal{L}$ y son convexos.

Sea $\gamma_0 \in \Gamma$ hiperbólica y sea $\gamma_1 \in \Gamma$ tq $\gamma_1 \gamma_0 \gamma_1^{-1}$ tiene E_γ^s que corta U . Tenemos que $\gamma_1 \gamma_0^n \gamma_1^{-1} \rightarrow E_\gamma^u$ uniforme en compactos. Tomando $\gamma_2 \in \Gamma$ tq $\gamma_2 E_\gamma^u$ corte V entonces $(\gamma_2 \gamma_1 \gamma_0^n \gamma_1^{-1})^{-1}$

Obs: Acá usamos que Γ es grupo (para tener x^{-1})
pero es posible bypasear.

$\hookrightarrow$ Pensar.

$$\text{Sea } D = \{x \in \mathcal{L} \text{ tq } \overline{\Gamma x} = \mathcal{L}\} \neq \emptyset \text{ (residual)} \\ N = \{y \in \mathcal{L} \text{ tq } \overline{\Gamma y} \neq \mathcal{L}\}$$

Tenemos D y N son Γ -invariantes.

Tb son invariantes por homotecias

$$(\text{si } y \in N \Rightarrow \lambda y \in N \text{ pues } \overline{\Gamma \lambda y} = \lambda \overline{\Gamma y})$$

Además ~~N es cerrado~~ cumple que si $y \in N$

$$\Rightarrow \overline{\Gamma y} \subseteq N. \text{ (pues } \overline{\Gamma y} \text{ es cerrado } \Gamma\text{-invariante y no es todo)}$$

[Lema: ~~Verdad~~ Si $y \in N$ entonces se
cumple que $0 \notin \overline{\Gamma y}$ y la órbita Γy es no acotada

dem: Notar que $\mathbb{P}(\overline{\Gamma y}) \subseteq \mathbb{P}(N)$ que es disjunto
de $\mathbb{P}(D)$ entonces $\mathbb{P}(\overline{\Gamma y}) \neq \Lambda$

Por otro lado, si $\overline{\Gamma y}$ acotado y lejos de 0 $\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\Gamma y}) = \overline{\mathbb{P}(\Gamma y)} = \Lambda$
por minimalidad, absurdo.

Ahora queremos ver que si $0 \in \overline{\Gamma y} \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\Gamma y}) = \Lambda$ que
vimos no puede ser.

Para eso vamos a usar:

Claim 1: Si $\exists x_n \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ tq $x_n \rightarrow 0$ entonces, $\forall \gamma \in \Gamma$ hiperbólico $\exists y_\gamma \in E_\gamma^u \setminus \{0\}$ tq $\gamma^k y_\gamma \in \mathcal{L} \forall k \in \mathbb{Z}$.

dem.: Aplicando alguna matriz (finitas opciones) podemos suponer que $x_n \notin E_\gamma^s \forall n$.

Escribimos $x_n = \underbrace{x_n^s + x_n^u}_{\in E_\gamma^s \oplus E_\gamma^u}$ con $x_n^u \neq 0$ ambos van a 0

Fijamos $u \in E_\gamma^u \setminus \{0\}$ entonces, $\exists k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tq

$\gamma^{k_n} x_n^u \in [u, \gamma u]$. Claramente $k_n \rightarrow \infty$

y mod subsucesión podemos suponer $\gamma^{k_n} x_n^u \rightarrow y_\gamma$

Como $\gamma^{k_n} x_n^s \rightarrow 0$ ta pronto. $\square$

Usando el claim, vemos que si $\overline{\Gamma} y \ni 0$ entonces

$\overline{\Gamma} y$ contiene orbitas en todos los E_γ^u con $\gamma \in \Gamma$ hiperbólico $\Rightarrow$ contiene $P(\overline{\Gamma} y) \supseteq \Lambda$ contradicción.

Nota: Estamos viendo tb que $E_\gamma^u \subseteq P(D)$.