

Teorema de Furstenberg

1

Teorema (Furstenberg) Sea μ de soporte compacto en $SL_2(\mathbb{R})$ tal que $\Gamma_\mu = \langle \text{sup } \mu \rangle$ es no elemental $\Rightarrow$ tiene una única medida estacionaria. (ν en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tq $\mu * \nu = \nu$)

Donde
$$\mu * \nu(A) = \int_{SL_2(\mathbb{R})} \underbrace{\nu(g^{-1}A)}_{g_* \nu(A)} d\mu(g)$$

Existencia sale de argumento clásico: $\text{Prob}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$ es compacto con top débil- $*$ $\Rightarrow$ tomamos ν_0 y definimos $\nu_n = \mu * \nu_{n-1}$ entonces, un punto de acumulación de $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \nu_j$ es una medida μ -estacionaria. (Ejercicio.)

La unicidad se muestra mediante el estudio del exponente de Lyapunov y el siguiente teorema:

Teorema (Furstenberg-Kesten/Doeblin)

$\exists \lambda \geq 0$ tq ~~una familia de subespacios~~ ~~una familia de subespacios~~
para μ^N -c.p. $w \in SL_2 \mathbb{R}^N$ y todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ salvo a lo sumo un espacio de dimensión 1, vale que

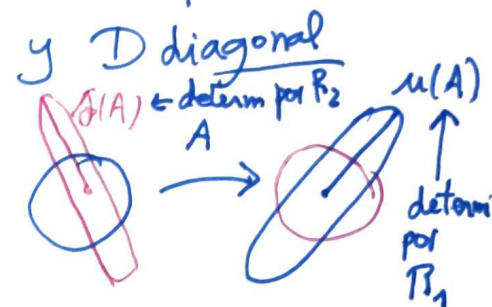
$$\frac{1}{n} \lim \|S_n(w)v\| = \lambda.$$

El espacio de dimensión 1, $E^-(w)$ depende mediblemente de $w \in SL_2 \mathbb{R}^N$.

Notación: $w = (Y_0(w), Y_1(w), \dots, Y_n(w), \dots)$
 $S_n(w) = Y_n(w) \dots Y_0(w).$

Idea de Oseledets:

Dado $A \in SL_2\mathbb{R}$ tenemos $A = R_1 D R_2$ con R_1 y R_2 rot



las entradas de D son $\|A\|$ y $\|A\|^{-1}$

[Obs: Si tomamos A matriz cualquiera y R rotación

$\Rightarrow AR = R_1 D (R_2 R)$ y $RA = (R R_1) D R_2$

La clave es que esto es cierto si cambiamos A cualquiera y R rotación por A de norma grande y R de norma chica.

Si tenemos Oseledets, y $\lambda(\mu) > 0$, resulta que $E^+(\omega)$ (es decir, el E^- para multiplicar al revés) da la distribución de la medida estacionaria y eso implica la unicidad.

En Resumen:

[Teo (Furstenberg) Si μ proba en $SL_2\mathbb{R}$ tq Γ_μ no elemental $\Rightarrow \lambda(\mu) > 0$.

(Hipótesis de Γ_μ no elemental, preguntar a Paula!)

Un par de Observaciones "similares" a lo dicho en Teo Oschidets. } 3

Lema: Si $\nu \in \text{Proba}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2))$ no es atómica y $g_n \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ convergen a $g \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (puede tener determinante 0 pero no ser la matriz 0)

$\Rightarrow g_n \nu \rightarrow g \nu.$

Vamos a considerar $g_n \in SL_2(\mathbb{R})$ y subsec. tq $\frac{g_n}{\|g_n\|} \rightarrow g_\infty$

que si $\|g_n\| \rightarrow \infty$ $\text{Im } g_\infty$ tiene dim 1

$\Rightarrow \frac{g_n}{\|g_n\|} \nu \rightarrow \delta_{\text{Im } g_\infty}$

Lema: Si $\nu \in \text{Proba}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2))$ no es atómica $\Rightarrow$

$H_\nu = \{g \in SL_2 : g\nu = \nu\}$ es elemental (conj a grupo de rotaciones)

Lema: Si ν es medida μ -estacionaria y Γ_μ no elemental $\Rightarrow \nu$ es sin átomos.

dem: Sea $\beta = \max_{x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)} \nu(\{x\})$ y suponemos $\beta > 0$

Si $F = \{x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) : \nu(\{x\}) = \beta\}$ es un conj finito y se cumple q si

$\beta = \nu(\{x_0\}) = \int_{SL_2} \nu(g^{-1}\{x_0\}) d\mu(g) = \beta \Rightarrow \nu(g^{-1}\{x_0\}) = \beta \quad \mu\text{-dp}$

$\Rightarrow F$ es Γ_μ -inv.

$\sigma: SL_2 \mathbb{R}^N \hookrightarrow$ / $\sigma(w) = (Y_1(w), \dots, Y_n(w), \dots)$
 si $w = (Y_0(w), \dots, Y_n(w), \dots)$
 preserva μ^N .

4

$T: SL_2 \mathbb{R}^N \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow$ es $T(w, x) = (\sigma(w), Y_0(w)x)$
 preserva $\mu^N \times \nu$.
 (Ejercicio)

Definimos $f: SL_2 \mathbb{R}^N \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ /

$$f(w, x) = \log \frac{\|Y_0(w)v\|}{\|v\|} \quad / \quad v \in X \setminus \{0\}.$$

Entonces,

$$\text{prom. Birkhoff} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(w, x) = \frac{1}{n} \log \frac{\|Y_n(w) \dots Y_0(w)v\|}{\|v\|}$$

$$= \frac{1}{n} \log \frac{\|S_n(w)v\|}{\|v\|} \longrightarrow \lambda(\mu)$$

salvo que
 $v \in E^-(w)$

Birkhoff

$$\lambda(\mu) = \iint f d\mu^N dv = \iint_{SL_2 \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)} \log \frac{\|gx\|}{\|x\|} d\mu(g) dv(x)$$

Queremos ver que $\lambda > 0$

Nota: Si es 0 sería que $\log \left(\iint \frac{\|gx\|}{\|x\|} d\mu(g) dv(x) \right) \leq \int (\log)$

Definimos entonces $\check{S}_n(\omega) = Y_0(\omega) \cdots Y_n(\omega)$

Lema Para μ^N -ctp $\omega \exists \nu_\omega \in \text{Prob}(\mathbb{R}^2)$ tq
 $\check{S}_n(\omega) \nu \longrightarrow \nu_\omega.$

dem: fijamos $f \in C^0(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2))$ y

$$F: S_2 \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } F(g) = \int f(gx) d\nu(x)$$

Si $\mathcal{F}_n$ es la σ -álgebra de cilindros en S_2^N de largo n
 $\Rightarrow \check{S}_n$ es $\mathcal{F}_n$ -medible.

Obs: $E(F(\check{S}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = F(\check{S}_n)$ (Es martingala)

dem:

$$\begin{aligned} E(F(\check{S}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) &= \int F(\check{S}_n g) d\mu(g) \\ &= \int \int f(\check{S}_n g x) d\mu(g) d\nu(x) \\ &\stackrel{\mu \otimes \nu = \nu}{=} \int f(\check{S}_n y) d\nu(y) = F(\check{S}_n) \end{aligned}$$

Entonces $\exists \Phi(f)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\check{S}_n(\omega))$ definido μ^N -ctp $\square$

Lema (Crucial)

Las medidas ν_w verifican

$$\sum_n(w) g \nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu_w \quad \text{para } \mu\text{-ctp } g.$$

Lo aceptamos y volvemos luego.

Corolario Para μ^N -ctp w , $\nu_w = \delta_{E(w)}$ con $E(w) \in P(\mathbb{R}^2)$

dem: Para μ^N -ctp w se cumple

$$\lim_n \sum_n(w) \nu = \lim_n \sum_n(w) g \nu \quad \mu\text{-ctp } g.$$

Sea B límite de $\frac{\sum_n(w)}{\|\sum_n(w)\|}$, como $\|B\| = 1$

tenemos $B\nu = Bg\nu$ para μ -ctp g . (Lema)

Si B es invertible $\Rightarrow g\nu = \nu$ μ -ctp $g \Rightarrow \int_\mu$ es el μ $\checkmark$

Si no $\Rightarrow B\nu = Bg\nu = \delta_{\text{Im}(B)}$ pues ν no tiene átomos (Lemas)

~~Se concluye~~

(7)

De hecho, obtenemos que $\|\sum_{n=0}^N S_n(w)\| \rightarrow \infty$ para μ^N -c.t.p. w

~~Se~~ Se concluye con el siguiente ejercicio de Teo. erg.

Prop: $T: (X, m) \rightarrow (X, m)$ preserva m y $f \in L^1(X, m)$ $f \geq 0$

tg $\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = +\infty$ para m -c.t.p. x

$\Rightarrow \int f dm > 0$

dem: Supongamos $\int f dm = 0 \Rightarrow \text{com } f \geq 0$

~~Se~~ $\Rightarrow$ los promedios de Birkhoff van a 0

Sea $A_\varepsilon = \{x \in X : \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \geq \varepsilon \ \forall n \geq 1\}$

y ~~estable~~ $B_\varepsilon = \bigcup_{k \geq 0} T^{-k}(A_\varepsilon)$

Como B_ε mide todo, A_ε mide ≥ 0 .

Los promedios de f son mayores que ε característica de $A_\varepsilon \Rightarrow$ no es 0 III