

Ratner en $SL_2(\mathbb{R})$

1

Teorema (Dani-Ratner) Sea $G = SL_2(\mathbb{R})$, $U = \{u_s := \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\}$.

Sea $\Gamma < G$ un subgrupo discreto y μ una probabilidad invariante y ergódica de la acción a izquierda de U en $X := G/\Gamma$.

Entonces, o bien μ está soportada en una U -órbita periódica,
o bien μ es G -invariante ($\Rightarrow$ Haas)

Obs: (1) Si Γ es cocompacto, entonces la primera opción no puede ser ($\Rightarrow$ la ergodicidad única):

Si $\exists x \in X = G/\Gamma$ de la forma $g\Gamma$ tq $u_T g\Gamma = g\Gamma$
entonces, eso significa que $g^{-1}u_T g\Gamma = \Gamma \Rightarrow g^{-1}u_T g \in \Gamma$
y es un elemento parabólico.

(2) Si Γ no es un lattice $\Rightarrow$ solo el primer caso puede pasar.
(en part, si Γ no es lattice ni tiene parabólicos $\Rightarrow$ no hay probas U -invariantes)

Notación: $A = \{a_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ y $B = AU$

$U^- = \{u_s^- := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\}$. $B^- = AU^-$

Notas: $u_s a_t = a_t u_{e^{-t}s}$ $u_s^- a_t = a_t u_{e^{-t}s}^-$

La prueba del Teorema se divide en 3 partes

Lema 1: Si μ está soportada en una B -órbita
(i.e. $\exists x \in X$ t.q. $\mu(Bx) = 1$) $\Rightarrow \mu$ es una U -órbita
periódica. (note, por ergodicidad, alcanza $\mu(Bx) > 0 \Rightarrow \mu(Bx) = 1$)

Lema 2: Si μ no está soportada en una B -órbita $\Rightarrow$
es B -invariante y A -ergódica.

Lema 3: Si μ es B -invariante $\Rightarrow$ es G -invariante.

dem (Lema 1) ~~Como~~ Supongamos $x = g\Gamma$ y $\mu(Bx) = 1$.

Como Γ es discreto, tb lo es $g\Gamma g^{-1}$ y $\Rightarrow \Delta = B \cap g\Gamma g^{-1}$ es
discreto en B .

μ es proba U -invariante en B/Δ .

Los subgrupos discretos de B son $\cong \mathbb{Z}$. (actúan en $\mathbb{H}^2$ con
cociente una superficie y no puede ser un toro)

O bien dan una órbita periódica para U (por ergodicidad)
o bien Δ generado por un elemento au con $a \neq id$.

Entonces las U -órbitas son cerradas, no compactas ($\Rightarrow$
no hay proba invariante).



[El siguiente lema 2 es lo crucial. Se le llama invariancia adicional y lo vamos a ver usando una versión bebé del llamado "polinomial drift".] 3

Consideramos $Z = \{x \in X / \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u_s, x) ds = \int_X \varphi d\mu \ \forall \varphi \in C_c(X)\}$

$\uparrow$
 cont de
 sq comp.

Dado $\varepsilon_0 > 0 \ \exists Z_0 \subseteq Z$ con $\mu(Z_0) > 1 - \varepsilon_0$ tq

$\forall \varphi \in C_c(X)$ el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u_s, x) ds = \int_X \varphi d\mu \text{ es uniforme en } x \in Z_0.$$

(Para esto, aplicamos Egorov en un conjunto denso numerable de $C_c(X)$ nos da Z_{ε_n} con $\mu(Z_{\varepsilon_n}) > 1 - \varepsilon/2^{n+1}$ entonces $Z_0 = \bigcap Z_{\varepsilon_n}$ tiene $\mu(Z_0) > 1 - \varepsilon$ y funciona, pq las funciones para las cuales el límite es uniforme para $x \in Z_0$ con Z_0 fijo es un cerrado). Podemos considerar Z_0 compacto sin pérdida de generalidad.

Afirmación 1: $\exists g_n \in G$ tq $g_n \notin B$, $g_n \rightarrow \text{id}$ y $g_n Z_0 \cap Z_0 \neq \emptyset$.

dem: Si no, $\exists D$ entorno de id en G $\forall g \in D \setminus B$ vale $g Z_0 \cap Z_0 = \emptyset$.

Sea $x = g \Gamma \in Z_0$ tal que $\mu(Dx \cap Z_0) > 0$, pero

$Dx \cap Z_0 \subseteq Bx$ por construcción $\Rightarrow \mu(Bx) > 0 \Rightarrow \mu(Bx) = 1$
 por ergodicidad.
 contradiciendo la hipótesis.
 Lema 2.

Sea entonces

$$g_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

con $\gamma_n \neq 0$ (suponemos $\gamma_n > 0$)
 $\alpha_n, \delta_n \rightarrow 1$ $\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = 1$
 $\gamma_n, \beta_n \rightarrow 0$

Sea $x_n \in Z_0$ / $g_n x_n \in Z_0$

$$\lambda_n = \gamma_n^{-1} \rightarrow \infty$$

Nos da:

$$u_{\lambda_n s} g_n = D_n(s) u_{\lambda_n d_n(s)}$$

con: $D_n(s) = \begin{pmatrix} \alpha_n + s & 0 \\ \gamma_n & \frac{1}{\alpha_n + s} \end{pmatrix} \rightarrow D(s) := \begin{pmatrix} 1+s & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+s} \end{pmatrix}$

Y: $d_n(s) = \frac{\beta_n \gamma_n + \delta_n s}{\alpha_n + s} \rightarrow d(s) := \frac{s}{1+s}$

Sea $\varphi \in C_c(X)$ y consideramos $a = \begin{pmatrix} 1+s_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+s_0} \end{pmatrix} \in A$

queremos ver que $\int_X \varphi^a d\mu = \int_X \varphi d\mu$ que si lo
 $\int_X \varphi(ax) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)$

veremos $\forall \varphi \in C_c(X)$ nos implica que μ es a -invariante.

Como s_0 es arbitrario $\rightarrow$ da que μ es A -invariante
 $(\Rightarrow B\text{-inv})$

Vamos a suponer $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ (es es solo mult. por constante)

Sean $0 < s_1 < s_2$ entonces, si $x \in \mathbb{Z}_0$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u_{\lambda s} x) ds &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_2 - s_1} \left[\int_0^{s_2} \varphi(u_{\lambda s} x) ds - \int_0^{s_1} \varphi(u_{\lambda s} x) ds \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_2 - s_1} \left[\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda s_2} \varphi(u_{s'} x) ds' - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda s_1} \varphi(u_{s'} x) ds' \right] = (*) \end{aligned}$$

$s' = \lambda s$
 $ds' = \lambda ds$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Fijado } \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 \text{ tq si } \lambda > \lambda_0 \text{ y } x \in \mathbb{Z}_0. (s_2 > s_1) \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{\lambda s_1} \int_0^{\lambda s_1} \varphi(u_{s'} x) ds' - \int \varphi d\mu \right| < \varepsilon / 100 s_2 \end{array} \right]$$

a menos de ε

$$(*) \stackrel{\text{si } \lambda \text{ grande}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_2 - s_1} \left[s_2 \int \varphi d\mu - s_1 \int \varphi d\mu \right]$$

$\Rightarrow$ si λ es grande, está a menos de ε de $\int \varphi d\mu$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u_{\lambda s} x) ds = \int \varphi d\mu.$$

en part $\Rightarrow \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u_{\lambda_n s} g_n x_n) ds - \int \varphi d\mu \right| \forall \varphi$

Aplicando a $\sigma_2 = d(s_2)$, $\sigma_1 = d(s_1)$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi^n(u_{\lambda_n \sigma} x_n) d\sigma = \int_X \varphi^n d\mu.$$

Queremos comparar entonces

$$\frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u_{\lambda_n s} g_n x_n) ds \stackrel{\text{con } n \text{ grande}}{\approx} \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi(u_{\lambda_n \sigma} x_n) d\sigma$$

Para $\varepsilon > 0$, elegimos $s_1 < s_2$ muy cerca de s_0 tal que

$$\forall s \in [s_1, s_2] \text{ se cumple que } \|\varphi^{D(s)} - \varphi^n\|_\infty \ll \varepsilon.$$

$$\text{y que } \left| \frac{1}{d'(s)} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s_2 - s_1} - 1 \right| \ll \varepsilon.$$

$$\text{Podemos fijar } n_0 \text{ tq si } n > n_0 \Rightarrow \|\varphi^{D_n(s)} - \varphi^{D(s)}\|_\infty \ll \varepsilon.$$

$$\text{y } |s_i - d_n^{-1}(\sigma_i)| \ll \varepsilon (s_2 - s_1) \quad (i=1,2)$$

$$\text{y } \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s_2 - s_1} \right| \cdot \left| \frac{1}{d'_n(s)} - \frac{1}{d'(s)} \right| \ll \varepsilon$$

Entonces, podemos calcular:

$$\frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \left| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \overbrace{\varphi(u_{\lambda_n s} g_n x_n)}^{\varphi(D_n(s) u_{\lambda_n d_n(s)} x_n)} ds - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi^a(u_{\lambda_n d_n(s)} x_n) ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \left| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [\varphi(D_n(s) x_n) - \varphi^a(u_{\lambda_n d_n(s)} x_n)] ds \right| \ll \varepsilon.$$

Cambiando $\sigma_n^n = d_n(s) \Rightarrow$

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi^a(u_{\lambda_n d_n(s)} x_n) ds$$

$$= \int_{\sigma_1^n}^{\sigma_2^n} \varphi^a(u_{\lambda_n \sigma} x_n) \frac{1}{|d_n'(s)|} d\sigma$$

Entonces, como $\sigma_1^n \sim \sigma_1$ y $\sigma_2^n \sim \sigma_2$, con error de $\ll \varepsilon$ tendremos que la integral tiene extremos σ_1 y σ_2 .

Pero como $\frac{1}{|d_n'(s)|} \approx 1$ a mucho menos de ε

Tenemos la integral deseada.

Finalmente, veamos la prueba del Lema 3.

Primero, como μ es B -invariante y U -ergódica $\Rightarrow$ es A -ergódica

(fenómeno de Mautner, Juan): $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} a_t u_s a_t^{-1} = id$

Dado $x \in X$ y $\varphi \in C_c(X)$ denotamos

$$\tilde{\varphi}(x) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(a_s x) ds \quad (\text{promedio de Birkhoff})$$

$$Y = \{x \in X / \tilde{\varphi}(x) = \int_X \varphi d\mu\}$$

Birkhoff dice que $\mu(Y^c) = 0$.

Sea λ la medida G -invariante ^(a izq) en $X = G/\Gamma$
queremos ver que $\lambda(Y^c) = 0$

Obs: Por continuidad uniforme, si $s \neq 0$ se cumple

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(a_t u_s^{-1} x) - \varphi(a_t x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(u_{e^{-t}s}^{-1} a_t x) - \varphi(a_t x)) = 0.$$

$$\text{Entonces, } \tilde{\varphi}(u_s^{-1} x) = \tilde{\varphi}(x) \quad \forall x \Rightarrow \boxed{U^{-1}Y = Y}.$$

Como μ es B -invariante y $\mu(Y) = 1$, Fubini dice que para μ -ctp $x \in X$ el conjunto $B_x = \{b \in B : bx \in Y\} \subseteq B$ tiene medida de Haar "total" en B .

Como

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ U^- \times B \mapsto \{g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G : \alpha \neq 0\} \text{ es un diffeo} \\ (u, b) \mapsto ub \end{array}$$

9

obtenemos que $\lambda(Y^c) = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \int_X \varphi d\mu$ para λ -c.t.p. x .

(Si λ es proba, terminamos por Birkhoff)

$\downarrow$
o finita.

Para ver $\lambda(X) < \infty$, sea $\varphi \geq 0$ tq $\int_X \varphi d\mu = 1$

$$\Rightarrow \lambda(X) = \int_X \tilde{\varphi} d\lambda \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_X \left(\frac{1}{t} \int_0^t \varphi(a_s x) ds \right) d\lambda = \int_X \varphi d\lambda < \infty$$

□

$$g_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{1}$$

$$\mu_s g_n \mu_s = \begin{pmatrix} \alpha_n + \gamma_n s & \beta_n + (\delta_n - \alpha_n) s - \gamma_n s^2 \\ \gamma_n & \delta_n - \gamma_n s \end{pmatrix}$$

$$\Delta i \sim \delta_n^{-1} = \gamma_n$$

$$\Rightarrow \mu_s g_n \mu_{-s} \approx \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \\ & \delta_n - 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_n + (\delta_n - \alpha_n) \gamma_n^{-1} - \gamma_n^{-1}$$

$$\delta_n - 1$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_n \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \end{pmatrix}$$

(se corrige)