

$G \curvearrowright X$ con G, X localmente compactos, G grupo.

$f: X \rightarrow [0, \infty)$ continua y propia. (imagen de compacto es compacto)

Si μ es una probabilidad en G definimos

$$A_\mu(f)(x) = \int_G f(gx) d\mu(g)$$

finita en comp.

Proposición: Si ν es G -invariante y $\exists f: X \rightarrow [0, \infty)$ propia y μ con soporte en G tq $\exists a \in (0,1)$ y $b > 0$ tq

$$A_\mu(f)(x) \leq a f(x) + b \quad \forall x \in X$$

Entonces $\nu(X) < \infty$.

dem:

Lema $\exists K \subseteq X$ compacto tq $\forall K' \subseteq X$ compacto existe $M_{K'} > 0$ tq si $n > M_{K'}$

$$A_\mu^n(\mathbb{1}_K) \geq \frac{1}{2} \mathbb{1}_{K'}$$

(es decir $A_\mu^n(\mathbb{1}_K)(x) > \frac{1}{2} \quad \forall x \in K'$)

dem: $A_\mu^n(f) \leq a^n f + B$ con $B = b \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{b}{1-a}$

$$K = \{y \in X / f(y) \leq 4B\} \Rightarrow \mathbb{1}_K \leq \frac{1}{4B} f$$

$$\Rightarrow A_\mu^n(\mathbb{1}_K)(x) \leq \frac{1}{4B} A_\mu^n(f)(x) \leq \frac{a^n}{4B} f(x) + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{si } n \text{ grande}$$

para probar la prop, entonces tomamos K como el lema

y dado $K' \subseteq X$ compacto cualquiera tenemos

ν es G -inv.

$$\nu(K') = \int_X \mathbb{1}_{K'}(x) d\nu(x) \leq 2 \int_X A_\mu^n(\mathbb{1}_K)(x) d\nu(x) \stackrel{\downarrow}{=} 2 \int_X \mathbb{1}_K(x) d\nu(x) \leq 2\nu(K)$$

Como vale $\forall K'$, vemos $\nu(X) \leq 2\nu(K)$. $\square$

* VA DPS

$$\bar{A} = \{g^{-1} : g \in A\}$$

Prop: Sea μ medida en $SL_d(\mathbb{R})$ simétrica ($\mu(A) = \mu(\bar{A}) \forall A$)
y $\text{sop}(\mu) \subseteq S^+ = \{g / g = g^t \text{ y } g \geq 0\}$ con $\int_G |\log \|g\|| d\mu(g) < \infty$

Entonces, $\forall v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vale que $\int_G \log \left(\frac{\|gv\|}{\|v\|} \right) d\mu(g) \geq 0$

Con igualdad $\Leftrightarrow gv = v$ μ -c.t.p. g .

dem: $I_v = \int_G \log \left(\frac{\|gv\|}{\|v\|} \right) d\mu(g)$

Como μ es simétrica ~~$\int_G \log \|gv\| d\mu(g) = \int_G \log \|g^{-1}v\| d\mu(g)$~~

$$\int_G \log \|gv\| d\mu(g) = \int_G \log \|g^{-1}v\| d\mu(g)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \int \log \|gv\| d\mu(g) &= \int \log \|gv\| d\mu(g) + \int \log \|g^{-1}v\| d\mu(g) \\ &= \int \log (\|gv\| \|g^{-1}v\|) d\mu(g) \geq \int_G \log (\langle gv, g^{-1}v \rangle) d\mu(g) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

Pero como $\text{supp } \mu \subseteq S^+$ tenemos que $\langle gv, g^{-1}v \rangle = \|v\|^2$ μ -c.p.

Entonces

$$2 \int \log \|gv\| d\mu(g) \geq 2 \int \log \|v\| d\mu = 2 \log \|v\|$$

La igualdad es $\Leftrightarrow$ μ -c.p. g vale gv colineal con $g^{-1}v$

$$\Rightarrow \underbrace{g^{-1}v}_{\text{v.p. de } g^2} \text{ es v.p. de } g^2 \quad \mu\text{-c.p. } g \Rightarrow v \text{ es } g\text{-inv}$$

ESPACIO DE LATTICES DE $\mathbb{R}^d$

Un lattice de $\mathbb{R}^d$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^d$ con cociente de volumen finito, se puede ver que tiene que ser compacto. (el radio de injectividad es constante en el cociente).

Por ser discreto en $\mathbb{R}^d$ es abeliano y sin torsión.

No es difícil ver que lattice $\Leftrightarrow$ discreto y de rango d . ($\simeq \mathbb{Z}^d$)

Sea $X' = GL_d(\mathbb{R}) / SL_d^+(\mathbb{Z})$ el espacio de lattices:

— Fijado $x \in X'$, $x = g SL_d^+(\mathbb{Z})$ induce el lattice $g\mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} \text{Notar que si } g\mathbb{Z}^d = g'\mathbb{Z}^d &\Rightarrow g^{-1}g'\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d \\ &\Rightarrow g^{-1}g' \in SL_d^+(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$\Delta_n \in X'$ converge a Δ si existen bases $\{f_n^1, \dots, f_n^d\}$ de $\Delta_n \rightarrow \{f^1, \dots, f^d\}$ de Δ .

Si $\Delta \in X'$, decimos que $L \subset \mathbb{R}^d$ es Δ -racional si $L \cap \Delta$ es un lattice de L .

Si L es Δ -racional y $\{v_1, \dots, v_d\}$ base de $\Delta \cap L$

notamos $d_\Delta(L) := \|v_1 \wedge \dots \wedge v_d\| \leftarrow$ volumen d -dimensional del toro asociado.
(o $d(L)$)

Obs: $d_\Delta(L)$ no depende de la base (cambio de base en $SL_d^+(\mathbb{R})$)

Definimos $d_\Delta := d_\Delta(\mathbb{R}^d) = \text{covolumen}(\Delta)$

Sea $X = \{\Delta \in X' \mid d_\Delta = 1\} \simeq SL_d(\mathbb{R}) / SL_d(\mathbb{Z})$
(a veces X_d, X'_d)

Prop: (Mahler) $Y \subseteq X'$ es de clausura compacta si y solamente si
 $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall \Delta \in Y$ se cumple que
 $d_\Delta \leq \alpha$ y $\inf_{v \in \Delta \setminus \{0\}} \|v\| \geq \beta$

se llama a veces la 1era systole } Not: $\alpha_1(\Delta) = \left(\inf_{v \in \Delta \setminus \{0\}} \|v\| \right)^{1/d}$

Una consecuencia es que $\alpha_1: X \rightarrow [0, \infty)$ es continua y propia.

Sea $V_d = \text{vol}(B(0,1) \subset \mathbb{R}^d)$ ($V_1=2, V_2=\pi, V_3=\frac{4\pi}{3}, V_4=\frac{\pi^2}{2}, V_5=\frac{8\pi^2}{15}$)

Lema (Hermite-Minkowski) Todo lattice $\Delta \in X'$ tiene un vector no nulo v con $\|v\| \leq 2 \left(\frac{d_\Delta}{V_d} \right)^{1/d}$

dem: $p: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d \simeq \mathbb{R}^d / \Delta$ y sea $R > 0$ $\sup \{ r > 0 \mid p|_{B(0,r)} \text{ es inyectiva} \} = R$

Entonces $R^d V_d \leq d_\Delta \Rightarrow R \leq \left(\frac{d_\Delta}{V_d} \right)^{1/d}$. $\forall \epsilon > 0 \exists u_1, u_2$ tal $\|u_2 - u_1\| < R + \epsilon$
 $\wedge u_2 - u_1 \in \Delta \Rightarrow$ su norma $< 2R$. $\square$

dem (Mahler) Sean $g \mapsto |\det(g)|$ que son continuas
 $g \mapsto \alpha_1(g\mathbb{Z}^d)$ de $GL_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$

Como son $SL_d^+(\mathbb{Z})$ inv, las funciones $\Delta \mapsto d_\Delta$ son continuas
 $\Delta \mapsto \alpha_1(\Delta)$

Si $\bar{Y}$ compacto, ambas están acotadas (y lejos de 0)
 Esto muestra una dirección. esto no usamos ~~para~~

Para la otra, supongamos que las funciones son acotadas en Δ_n y queremos una subsucesión convergente en X' .

Lo probamos por inducción en d . Obvio para $d=1$: (pq sístole acota por abajo y largo por arriba)

Suponiendo vale para $d-1$, tomamos Δ_n y tiene un vector de norma mínima acotada por abajo (pues $\alpha_1(\Delta_n) < \beta^{-1}$) y por el lema anterior y dado que $d_{\Delta_n} < \alpha$ está tb acotado por arriba.

Módulo subsucesión, tenemos $\Delta_n = \{f_n^1, \dots, f_n^{d-1}, f_n^d\}$ con $f_n^d \rightarrow f_\infty^d$ de norma mínima

Componiendo Δ_n con rotaciones que $\rightarrow$ id podemos suponer $f_n^d = f_\infty^d \forall n$.
 (y homot)

Consideramos $\Delta'_n = \Pi(\Delta_n)$ con $\Pi: \mathbb{R}^d \rightarrow (f_\infty^d)^\perp$ proy ortogonal
 la inducción completa vía.

[Af: Δ'_n son lattices, $d_{\Delta'_n} < \alpha$ y $\alpha_1(\Delta'_n) > \frac{2}{\sqrt{3}\beta}$.]

dem: ~~Si se cumple lo de la sístole está~~ (pq va a ser discreto y el volumen $\leq$)
 Si hay $v = f - \eta f_\infty \in (f_\infty)^\perp$ y $f \in \Delta_n^{\text{pos}}$
 Entonces $\|f\|^2 = \|v\|^2 + \eta^2 \|f_\infty\|^2$ con $\eta \in (0, 1/2)$
 (sinu habría más p...)

Tb vamos a usar unos lemas técnicos:

Lema: Sea Δ lattice de $\mathbb{R}^d$ y L, M subespacios Δ -racionales

$\Rightarrow L \cap M$ y $L+M$ son Δ -racionales y vale que

$$d_{\Delta}(L \cap M) d_{\Delta}(L+M) \leq d_{\Delta}(L) d_{\Delta}(M)$$

(Notas: $d_{\Delta}(0) = 1$)

dem:

No es pérdida suponer $\Delta = \mathbb{Z}^d$ (explicar) no es para la cuenta, sino para mostrar que $L+M$, $L \cap M$ son racionales.

Entonces, ser Δ -racional es ~~lo mismo~~ equivalente a

① $\rightarrow$ ser generado por vectores con coef. racionales $\Rightarrow L+M$ es racional

② $\rightarrow$ ser definido por eq. lineales en $\mathbb{Q} \Rightarrow L \cap M$ es racional.

Para la fórmula, tomamos base $u_1, \dots, u_k$ de $L \cap M \cap \Delta$.

completamos a bases de $L \cap \Delta$ y $M \cap \Delta$
 $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell$ $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m$

Entonces, $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell, w_1, \dots, w_m$ es base de $(L+M) \cap \Delta$.

La afirmación entonces es un lema de álgebra lineal

$$\|u\| \cdot \|u \wedge v \wedge w\| \leq \|u \wedge v\| \cdot \|u \wedge w\|$$

(Sugerencia, usar Gram-Schmidt)



pa dps — NO HACER.—

7

Lemita: Si $S_i(\Delta) = \{L \subset \mathbb{R}^d \text{ que es } \Delta\text{-racional de dim } i\}$

(a) $\forall C > 0, \#\{L \in S_i(\Delta) \text{ tq } d_\Delta(L) < C\} < \infty$.

(b) ~~tenemos~~ $\alpha_i : X \rightarrow (0, \infty) / \alpha_i(\Delta) = \left(\min_{L \in S_i(\Delta)} d_\Delta(L) \right)^{-1}$ es continua.

dem: (a) $\Delta = \mathbb{Z}^d$, si $e_1, \dots, e_i$ base de $L \cap \Delta \Rightarrow e_1, \dots, e_i \in \Lambda^i(\mathbb{Z}^d)$
solo finitas opciones de norma $\leq C$.

(b) Tenemos las desigualdades $\|g^{-1}\|^{-d} d_\Delta(L) \leq d_{g\Delta}(gL) \leq \|g\|^d d_\Delta(L)$



Tenemos $\alpha_i : X' \rightarrow [0, \infty)$ tq

$$\alpha_i(\Delta) := \sup \{ d_\Delta(L)^{-1} : L \subset \mathbb{R}^d \text{ } \Delta\text{-racional, dim } L = i \}$$

(Not $\alpha_0 \equiv 1$) — Notan que α_i (en part α_1) son las ya def.)

Las funciones α_i son propias por el criterio de Mahler. (y la estimativa de Hermite-Minkowski) (si $\alpha_i \rightarrow +\infty$, α_1 tb)

Queremos usarlas para construir la f deseada. Veamos primero (*)
(pag 2 e inicio de 3)

Tenemos que si μ es medida simétrica en $SL_d(\mathbb{R})$ soportada en las matrices simétricas y definitivas positivas (con sop compacto) y que no fijan vectores ni subespacios de $\mathbb{R}^d \rightarrow$

$$\int_G \log \frac{\|gv\|}{\|v\|} d\mu(g) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

- COR

MVP 1500 / (ya comen...)

Sea $\varphi_i : W_i \rightarrow (0, +\infty)$ donde $W_i \subseteq \Lambda^1(\mathbb{R}^d)$ son los vectores descomponibles,

$$\varphi_i(v) = \|v\|^{-1}$$

i.e. $v \in W_i$ si $\exists w_1, \dots, w_i \in \mathbb{R}^d$ tq $v = w_1 \wedge \dots \wedge w_i$

Lema: Para μ como antes, $\exists \delta > 0$, ~~a_0~~ $a_0 \in (0, 1)$ tq $\forall 0 < i < d$ tenemos que

$$A_\mu(\varphi_i^\delta) \leq a_0 \varphi_i^\delta$$

(Nota φ_i no es propia, la medida G -inv en W_i es de masa infinita)

dem: Tenemos que $\int_G \log \frac{\|gv\|}{\|v\|} d\mu(g) > 0 \quad \forall v \in W_i$

Si miramos bs de norma 1, $\exists C > 0$ tq $\int_G \log \|gv\| d\mu(g) \geq 2C \quad \forall v \in W_i$ con $\|v\| = 1$.

Sea $M = \max \left\{ \frac{\log \|g\|^d}{\log \|g\|^{d-1}} / g \in \text{supp}(\mu) \right\}$

Vamos a usar $e^t \leq 1 + t + t^2 \quad \forall t \in [-1, 1]$.

Sea $\delta = \min \{1/M, C/M^2\}$

$$\begin{aligned} \frac{A_\mu(\varphi_i^\delta)(v)}{\varphi_i^\delta(v)} &= \frac{1}{\varphi_i^\delta(v)} \cdot \int_G \varphi_i^\delta(gv) d\mu(g) = \int_G \exp(-\delta \log \frac{\|gv\|}{\|v\|}) d\mu(g) \\ &\leq 1 - \delta \int_G \log \left(\frac{\|gv\|}{\|v\|} \right) d\mu(g) + \delta^2 \underbrace{\int_G \left(\log \frac{\|gv\|}{\|v\|} \right)^2 d\mu(g)}_{\leq M^2} \\ &\leq 1 - C\delta \quad \text{con } a_0 = 1 - C\delta \text{ estamos.} \end{aligned}$$

■

Vamos a usar esto para ver que:

Lema: Sea μ como antes (soporte compacto), entonces, existe $a_0 < 1$ y $\delta_0 > 0$ tq $\forall 0 < \delta < \delta_0$ vale que:

$$A_\mu(\alpha_i^\delta) \leq a_0 \alpha_i^\delta + b_0 \left(\max_{j \geq 0} \left\{ \alpha_{i-j}^\delta \alpha_{i+j}^\delta \right\} \right)^{1/2}$$

$\hookrightarrow \leq \min\{i, d-i\}$

dem: Fijamos a_0 y δ como antes (idem, M.C)

Sea $r = \sup \{ \max\{\|g\|^d, \|g^{-1}\|^d\} : g \in \text{supp } \mu \}$

Entonces, $\forall L$ que es Δ -racional, vale que μ -ctp g

$$r^{-1} d_\Delta(L) \leq d_{g\Delta}(gL) \leq r d_\Delta(L)$$

Sea $L_i \subseteq \mathbb{R}^d$ Δ -racional de dim i tq $\alpha_i(\Delta)^{-1} = d_\Delta(L_i)$

y sea $\Psi_i := \{ L \subseteq \mathbb{R}^d / L \text{ es } \Delta\text{-racional de dim } i \text{ y } d_\Delta(L) \leq r^2 d_\Delta(L_i) \}$

Caso 1: $\# \Psi_i = 1$ (i.e. $\Psi_i = \{L_i\}$)

Lema para Ψ_i^δ

En este caso

$$A_\mu(\alpha_i^\delta)(\Delta) = \int_{\mathbb{G}} \frac{1}{d_{g\Delta}(gL_i)} d\mu(g) \leq a_0 \alpha_i^\delta(\Delta)$$

Caso 2: Ψ_i tiene L_i y L'_i : Sea $j = \dim(L_i + L'_i) - i$

Entonces, vale que

$$\alpha_i(g\Delta) \leq r \cdot \alpha_i(\Delta) = r d_\Delta(L_i)^{-1} \leq$$

$$\begin{aligned}
 r d_{\Delta}(Li)^{-1} &\stackrel{\downarrow}{\leq} r^2 (d_{\Delta}(Li) d_{\Delta}(Li'))^{-1/2} \\
 &\stackrel{\uparrow}{\leq} r^2 (d_{\Delta}(Li \cap Li') d_{\Delta}(Li + Li'))^{-1/2} \\
 &\stackrel{\text{formel anterior}}{\leq} r^2 (\alpha_{i-j}(\Delta) \alpha_{i+j}(\Delta))^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\leq r^2 (d_{\Delta}(Li \cap Li') d_{\Delta}(Li + Li'))^{-1/2}$$

$$\leq r^2 (\alpha_{i-j}(\Delta) \alpha_{i+j}(\Delta))^{1/2}$$

Entonces, $A_\mu(\alpha_i^\delta) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ b_0 = r^{2\delta}}}{b_0} \max_{j \geq 0} \{ \alpha_{i-j}^\delta(\Delta) \alpha_{i+j}^\delta(\Delta) \}^{1/2}$.

Corolario: Con la misma μ , etc., $\exists \delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tq

$$f: X \rightarrow [0, \infty) \text{ dada por}$$

$$f := \sum_{0 \leq d \leq d} \varepsilon^{(d-i)i} \alpha_i \delta$$

L es propia y cumple que $\exists a \in (0,1), b > 0$ t.q. $\Lambda_n(f) < af + b$.

dem: Si $\varepsilon > 0$, f es propia. ~~Probar que f es propia~~
~~Las α_i lo son. $\leftarrow$ dar argumento~~

Sei $\beta_i = \varepsilon^{(d-i)i} \alpha_i$ $\Rightarrow f := \sum_{0 \leq i \leq d} \beta_i$ Usamos $2(st)^{k/2} \leq st + t^{k+2}$

Usamos $2(st)^{1/2} \leq s+t$ ~~1st~~

$$A_{\mu} f \leq a_0 \sum_{\alpha: i \leq d} \beta_i + b_0 \max_{j \geq 0} \underbrace{\varepsilon_j^2}_{\substack{\text{a calcular} \\ \text{pero es} \\ \text{directo}}} (\beta_{i-j} \beta_{i+j})^{1/2} \leq (a_0 + b_0 \varepsilon_d) \sum_{\alpha: i \leq d} \beta_i + b_0 \varepsilon_d.$$

Teorema $SL_d(\mathbb{Z})$ es lattice de $SL_d(\mathbb{R})$.

11

dem: Alcanza mostrar que existe μ con las propiedades deseadas.

Por ejemplo $\mu = \frac{1}{4} (\delta_A + \delta_B + \delta_{A^{-1}} + \delta_{B^{-1}})$

con $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_d \end{pmatrix}$

y $B = R A R^{-1}$ con R ortogonal

$a_1 > a_2 > \dots > a_d > 0$.

R tq A, B quedan sin vectores invariantes en común.

Teorema: Sea $d \geq 3$ y $Q(x_1, \dots, x_d) = \sum a_{ij} x_i x_j$ una forma cuadrática no degenerada a coef. enteros.
 Sea $G_{\mathbb{R}} = \{g \in SL_d(\mathbb{R}) / Q \cdot g = Q\}$ y $G_{\mathbb{Z}} = SL_d(\mathbb{Z}) \cap G_{\mathbb{R}}$
 Entonces, $G_{\mathbb{Z}}$ es lattice de $G_{\mathbb{R}}$.

dem: 1ero $i: G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}} \rightarrow SL_d(\mathbb{R})/SL_d(\mathbb{Z}) \simeq X$ es una inyección propia.

dem: Sean $g_1, g_2 \in G_{\mathbb{R}}$ tq $g_1 SL_d \mathbb{Z} = g_2 SL_d \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow g_2^{-1} g_1 \in SL_d \mathbb{Z} \cap G_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{Z}} \Rightarrow i$ inyectiva

Propia: $g_n SL_d \mathbb{Z} \rightarrow g_o SL_d \mathbb{Z}$ en X con $g_n \in G_{\mathbb{R}}$ y sean $h_n \in SL_d \mathbb{Z} /$
 $g_n h_n \rightarrow g_o$

afirmamos que a menos de subsección, tenemos

$$h_n = \gamma_n h \quad \text{con } \gamma_n \in G_{\mathbb{Z}} \text{ y } h \in SL_d(\mathbb{Z})$$

Esto es pq

$$\begin{array}{c} \text{SL}_d(\mathbb{Z}) \\ \backslash \\ G_{\mathbb{Z}} \end{array} \hookrightarrow \begin{array}{c} \text{SL}_d(\mathbb{R}) \\ \backslash \\ G_{\mathbb{R}} \end{array}$$

es inyección
con imagen discreta

Entonces, como

$$g_n h_n \rightarrow g_{\infty} \quad \text{el } h \text{ se estabiliza}$$

(son $\mathbb{N}$ formas cuadráticas
con coef enteros)

$$\Rightarrow g_n \gamma_n \rightarrow g_{\infty} h^{-1} \in G_{\mathbb{R}}. \quad \text{y tenemos el resultado.}$$

□

2^{do} PASO : Construir la μ como antes.

Prop: X localmente compacto separable

G grupo que actúa en X

ν medida de Radon en X que es G -invariante.

μ medida en G (soporte compacto)

$f: X \rightarrow [0, \infty)$ función continua y propia tq $\exists a \in (0, 1), b > 0$ tq

$$A_\mu(f)(x) := \int_G f(gx) d\mu(g) < a f(x) + b \quad \forall x \in X.$$

Entonces, $\nu(X) < \infty$.

Miramos $X_d = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ espacio de lattices de $\mathbb{R}^d$ de volumen 1.

Si $L \subset \mathbb{R}^d$ subespacio de dimensión i y $\Delta \in X_d$ lattice, decimos que

L es i -racional si $L \cap \Delta$ es lattice de L y $d_\Delta(L)$ denota su i -volumen.

Def: $\alpha_i: X_d \rightarrow [0, \infty)$ es $\alpha_i(\Delta) = \left(\inf_{L \text{ i-racional}} d_\Delta(L) \right)^{-1}$

Prop (Mahler) $\alpha_i: X_d \rightarrow [0, \infty)$ es una función propia.

Obs: Si L es i -racional y $\{v_1, \dots, v_i\}$ es base de $L \cap \Delta$ (como $\mathbb{Z}$ -módulo) entonces, $d_\Delta(L) = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_i\|$ (no depende de la base.)

Vamos a ver que medio que "cualquier" medida en $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ debería, en promedio, agrandar las sístoles.

Para simplificar vamos a considerar μ en $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ con las siguientes prop.

① μ soporte compacto y simétrica en el sentido que $\mu(A) = \mu(\bar{A}^t)$
(con $A^t = \{g \in \mathrm{SL}_d : g^{-1} \in A\}$)

② μ soportada en matrices simétricas (i.e. $g = g^t$) ~~definitivas~~

③ Irreducible: $\nexists v / g v \neq p \cdot v$

Decimos que μ es una "buena probabilidad" si cumple eso.

2

Prop (Furstenberg?) Sea μ una buena probabilidad, entonces cumple que $\exists C > 0$ tq $\forall v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ se verifica que

$$I_v = \int_G \log \left(\frac{\|gv\|}{\|v\|} \right) d\mu(g) > C.$$

dem:

Como μ es simétrica $\int_G \log \|gv\| d\mu(g) = \int_G \log \|g^{-1}v\| d\mu(g)$

Entonces:

$$2 \int_G \log \|gv\| d\mu(g) = \int_G \log \|gv\| d\mu(g) + \int_G \log \|g^{-1}v\| d\mu(g) =$$

$$= \int_G \log (\|gv\| \cdot \|g^{-1}v\|) d\mu(g) \geq \int_G \log \langle gv, g^{-1}v \rangle d\mu(g) = (*)$$

μ -ctp $g = g^t$
Cauchy Schwartz

Como $\langle gv, g^{-1}v \rangle = \langle v, v \rangle$ tenemos $(*) = 2 \int_G \log \|v\| d\mu = 2 \log \|v\|$

Entonces $I_v \geq 0$ y la igualdad es si y solo si gv colineal con $g^{-1}v$ para todo $g \Rightarrow g^2$ fija v para μ -ctp $g \Rightarrow g$ tb.

Si asumimos tb que μ -ctp g no fija rectas ni subespacios, decimos que μ es "muy buena probabilidad". Sea $W_i \subseteq \Lambda^i(\mathbb{R}^d)$ vectores descomponibles.
(Notar $G = \text{SL}_d(\mathbb{R}) \curvearrowright W_i$)

$\varphi_i: W_i \rightarrow (0, \infty)$ definida por $\varphi_i(v) = \|v\|^{-1}$

(con $v = w_1 \wedge \dots \wedge w_i \Rightarrow \|v\| = \|w_1 \wedge \dots \wedge w_i\|$ i-vol del paralelepípedo.)

Lemma Sea μ muy buena probabilidad en SL_R (actuando en W_i)
 Entonces, $\exists \delta > 0$, $a_0 \in (0,1)$ ~~tal que~~ $\forall 0 < \delta < a_0$ tenemos que

$$A_\mu(\varphi_i^\delta) \leq a_0 \varphi_i^\delta$$

Obs: La medida de Haar inducida en W_i es infinita PERO no es contradicción pq φ_i^δ no es propia.
~~Excepciones de e.g. si $v_n \rightarrow \infty$~~ (incluso $W_1 \approx \mathbb{R}^d$ si $v_n \rightarrow \infty$)
 $\Rightarrow \varphi_1(v_n) \rightarrow 0$

dem: Usando lo anterior

$$\int_G \log \frac{\|gv\|}{\|v\|} d\mu(g) > C \quad \forall v \in W_i$$

Sea $M = \max \{ \log(\|g\|^d), \log(\|g\|^{-d}) : g \in \text{supp } \mu \}$

Obs: $e^t \leq 1 + t + t^2 \quad \forall t \in [-1,1]$

Consideramos $\delta < \min \{ \frac{1}{2M}, \frac{C}{2M^2}, \frac{1}{2C} \}$

$$\begin{aligned} \frac{A_\mu(\varphi_i^\delta)(v)}{\varphi_i^\delta(v)} &= \frac{1}{\varphi_i^\delta(v)} \cdot \int_G \varphi_i^\delta(gv) d\mu(g) = \int_G \exp\left(-\delta \log \frac{\|gv\|}{\|v\|}\right) d\mu(g) \\ &\leq 1 - \underbrace{\delta \int_G \log \frac{\|gv\|}{\|v\|} d\mu(g)}_{> C} + \underbrace{\delta^2 \int_G \left(\log \frac{\|gv\|}{\|v\|} \right)^2 d\mu(g)}_{\leq \frac{\delta C}{2}} \\ &\leq 1 - \frac{\delta C}{2} \in (0,1) \rightarrow a_0 = 1 - \frac{C\delta}{2} \text{ funciona.} \end{aligned}$$

En lo que sigue vamos a mostrar que si μ es una "muy buena medida"

entonces, $\exists \delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que la función propia $f: X_d \rightarrow [0, +\infty)$

⊕ dada por $f := \sum_{0 \leq i < d} \varepsilon^{(d-i)i} \alpha_i^\delta$ cumple que $\exists a \in (0, 1)$ y $b > 0$

ta $A_\mu(f) < af + b$. (f es propia pq α_1 lo es)

Obs: ⊕ $\Rightarrow SL_d(\mathbb{Z})$ es lattice en $SL_d(\mathbb{R})$ (si mostramos que $\exists \mu$ muy buena medida en $SL_d(\mathbb{R})$, pero basta $\mu = (\delta_{g_1} + \delta_{g_2} + \delta_{g_1^{-1}} + \delta_{g_2^{-1}}) \frac{1}{4}$

con $g_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix}$ con $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ y $g_2 = O_2 g_1 O_2^{-1}$ con O_2 ortogonal genérica)

Para probar ⊕ la clave es:

Lema En las condiciones de ⊕ $\exists a_0 \in (0, 1)$ y $b_0 > 0$ ta $\forall 0 \leq i < d$ vale que

$$A_\mu(\alpha_i^\delta) \leq a_0 \alpha_i^\delta + b_0 \left[\max_{0 \leq j < \min\{i, d-i\}} \{(\alpha_{i-j}^\delta \alpha_{i+j}^\delta)^{1/2}\} \right]$$

dem: Tomamos $R = \delta e^M$ y las constantes $a_0 \in (0, 1)$, δ , como antes.

Si L es $\mathbb{Z}$ -racional, se cumple que μ -ctp g

$$R^{-1} d_\Delta(L) \leq d_{g\Delta}(gL) \leq R d_\Delta(L)$$

~~Para cada~~ Elegimos $L_i \subseteq \mathbb{R}^d$ Δ -racional de dim i ta $d_\Delta(L_i) = \alpha_i(\Delta)^{-1}$

$$d_{\Delta}(L) > R^2 d_{\Delta}(L_i)$$

[5]

[Caso 1: $\forall L$ i -racional de Δ se cumple que ~~$d_{\Delta}(L) > R^2 d_{\Delta}(L_i)$~~]

En este caso $\alpha_i(g\Delta) = \underbrace{d_{g\Delta}(gL_i)^{-1}}_{\varphi_i^d(g\Delta)}$ para μ -c.t.p $g \in SL_d(R)$

$\Rightarrow A_{\mu}(\alpha_i^d)(\Delta) \leq a_0 \alpha_i^d(\Delta)$ por la cuenta hecha para φ_i^d

[Caso 2: Se cumple que $\exists L'_i$ tq $d_{\Delta}(L'_i) \leq R^2 d_{\Delta}(L_i)$

Sea $j := \dim(L_i + L'_i) - i$ ($\Rightarrow \dim(L_i \cap L'_i) = i - j$)

$$\alpha_i(g\Delta) \leq R \alpha_i(\Delta) = R d_{\Delta}(L_i)^{-1} \leq R^2 (d_{\Delta}(L_i) d_{\Delta}(L'_i))^{-1/2} \leq (*)$$

- Cuenta: $d_{\Delta}(A) \cdot d_{\Delta}(B) \geq d_{\Delta}(A \cap B) d_{\Delta}(A+B)$. — $\forall A, B$ Δ -racionales

$$\Rightarrow (*) \leq R^2 (d_{\Delta}(L_i \cap L'_i) \cdot d_{\Delta}(L_i + L'_i))^{-1/2} \leq R^2 (\alpha_{i-j}(\Delta) \alpha_{i+j}(\Delta))^{1/2}$$

Entonces, $A_{\mu}(\alpha_i^d)(\Delta) \leq R^{2d} \max_{0 \leq j \leq \min\{d-i, i\}} \{ \sqrt{\alpha_{i-j}(\Delta) \alpha_{i+j}(\Delta)} \}$.

Juntando los dos casos (son ambas funciones positivas $\Rightarrow$ la suma es cota) se obtiene la demostración. $\square$

Cuenta: Nota si A, B Δ -racionales, tb $A+B$ y $A \cap B$.

Sea $u_1, \dots, u_k$ base de $A \cap B$ completamos a $v_1, \dots, v_r$, $w_1, \dots, w_s$ de $A+B$

Queremos $\|u\| \cdot \underbrace{\|u \wedge v \wedge w\|}_{\text{quizás no ortogonales}} \leq \|u \wedge v\| \cdot \|u \wedge w\|$ vía G.S. podemos suponer $u_1, \dots, u_k$ $v_1, \dots, v_r$ y $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ ortog.

Usamos $\beta_i = \varepsilon^{(d-i)i} \alpha_i^d$

- $2(d-i)i = (d-i+j)(i+j) + (d-i+j)(i-j) + 2j^2$

- $\forall s, t \geq 0 \quad t+s \geq 2\sqrt{st}$

~~$$A_{\mu f} \leq a_0 \sum_{0 \leq i < d} \beta_i + b_0 \sum_{0 \leq i, j < d} \max_j \varepsilon^{j^2} (\beta_{i-j} \beta_{i+j})^{1/2}$$~~

$$A_{\mu f} \leq a_0 \sum_{0 \leq i < d} \beta_i + b_0 \sum_{0 \leq i < d} \max_j \{ \varepsilon^{j^2} (\beta_{i-j} \beta_{i+j})^{1/2} \}$$

$$\leq a_0 \sum_{0 \leq i < d} \beta_i + b_0 d^2 \varepsilon \cdot \sum_j (\beta_{i-j} + \beta_{i+j})$$

$$\leq (a_0 + cte \cdot \varepsilon) \underbrace{\sum_{0 \leq i < d} \beta_i}_f + cte \Rightarrow \underline{OK. si}$$

$$\boxed{a_0 + cte \varepsilon < 1}$$

(i.e. ε es chico)



(Cuenta 1)

$$f = \sum_{0 \leq i < d} \underbrace{\varepsilon^{(d-i)i}}_{\beta_i} \alpha_i^\delta$$

$$A_\mu(\beta_i) = a_0 \beta_i + b_0 \varepsilon^{(d-i)i} \max_j \sqrt{\alpha_{i-j}^\delta \alpha_{i+j}^\delta} \leq *$$

$$\alpha_{i-j}^\delta \alpha_{i+j}^\delta = \frac{\varepsilon^{(d-i+j)(i-j)} \varepsilon^{(d-i-j)(i+j)}}{\varepsilon^{(d-i+j)(i-j) + (d-i-j)(i+j)}} \alpha_{i-j}^\delta \alpha_{i+j}^\delta$$

$$= \beta_{i-j}^\delta \beta_{i+j}^\delta \cdot \varepsilon^{-(d-i+j)(i-j) - (d-i-j)(i+j)}$$

Como $-(d-i+j)(i-j) - (d-i-j)(i+j) = -2(d-i)i + 2j^2$

Obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_{i-j}^\delta \alpha_{i+j}^\delta} &= \varepsilon^{-(d-i)i} \cdot \varepsilon^{j^2} \cdot \sqrt{\beta_{i-j}^\delta \beta_{i+j}^\delta} \\ &\leq \varepsilon^{-(d-i)i} \varepsilon^{j^2} (\beta_{i-j}^\delta + \beta_{i+j}^\delta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow * \leq a_0 \beta_i + b_0 \max_{0 \leq j < \min\{i, d-i\}} \varepsilon^{j^2} (\beta_{i-j} + \beta_{i+j})$$

$$\leq a_0 \beta_i + b_0 \varepsilon \sum_{j=1}^d \beta_j + \underbrace{b_0 \varepsilon}_{\beta_0 = 1}$$

$\beta_0 = 1$

C

cuenta 2

$$A_p(f) \leq (a_0 + b_0 \varepsilon d) \underbrace{\sum \beta_i}_{\substack{= \\ f}} + b_0 \varepsilon d$$

Si ε es suficientemente pequeño

$$\underbrace{a_0}_{\substack{= \\ 1}} + \underbrace{b_0 \varepsilon d}_{\substack{= \\ \text{fips de antemano}}} < 1$$