

CONVOLUCIONES DE BERNOLLI

1

Consideramos el IFS; para $\lambda \in (0, 1)$.

$$\varphi_+^\lambda(x) = \lambda x + 1$$

$$\varphi_-^\lambda(x) = \lambda x - 1$$

Tenemos que si: $\lambda \in (0, 1/2)$, el compacto K_λ + q

$$\varphi_+^\lambda(K_\lambda) \cup \varphi_-^\lambda(K_\lambda) = K_\lambda \text{ es un cantor}$$

$$\rightarrow \lambda \in [1/2, 1) \Rightarrow K_\lambda = [-\frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}].$$

(Nota, es conjugado al IFS en $[0, 1]$ / $\varphi_+^\lambda(x) = \lambda x + (1-\lambda)$
(afinmente) $\varphi_-^\lambda(x) = \lambda x$)

El mapa: $\Pi_\lambda: \Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \rightarrow \mathbb{R} / \Pi_\lambda(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \lambda^n$
(donde $\omega = \{\omega_n\}_{n \geq 0}$)

Cuando: $\lambda \in (0, 1/2)$ es un homeo de Ω en K_λ .

$\lambda \in [1/2, 1)$ es mapa continuo y sobreyectivo de Ω en K_λ .

Definimos: ν_λ la medida en $\mathbb{R}$ (con soporte en $[-\frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}]$)

dada por $\nu_\lambda(A) = \mu \circ \Pi_\lambda^{-1}(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ medible}$

Donde μ es la medida $(1/2, 1/2)^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ (Bernoulli)

Equivalentemente,

2

ν_λ es la única probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que

$$\nu_\lambda = \frac{(\varphi_+^\lambda) * \nu_\lambda + (\varphi_-^\lambda) * \nu_\lambda}{2} \quad (\text{medida estacionaria})$$

↪ (Esto es pues el operador
 $\eta \mapsto \frac{1}{2}((\varphi_+^\lambda)_* \eta + (\varphi_-^\lambda)_* \eta)$
es una contracción para métrica adecuada)

Teorema (Solomyak, Peres-Solomyak)

$\exists$ conjunto $\Lambda \subseteq (\frac{1}{2}, 1)$ (no explícito) de medida de Lebesgue total en $(\frac{1}{2}, 1)$ tq $\forall \lambda \in \Lambda$ se cumple que ν_λ es absolutamente continua y con densidad en L^2 .

Obs: Esto mismo mostro que $(\frac{1}{2}, 1) \setminus \Lambda$ es no vacío.

Los ejemplos que mostramos son los únicos conocidos. Sin embargo hasta hace pocos años no se conocía ningún valor explícito de $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ tq ν_λ fuese abs. cont.

Plan: ① Criterio de continuidad absoluta para casi todo $\lambda \in I \subseteq (\frac{1}{2}, 1)$.

② Condición de transversalidad e implicancia en ciertos intervalos.

③ Criterio para conseguir transversalidad (muy ad hoc)

④ Construcción de un intervalo donde vale la transv.
(más ad hoc todavía)

⑤ Breve comentario sobre "aplicaciones".

Primero una propiedad general:

Prop: Sea η medida de Radon en $\mathbb{R}$ (i.e. Borel y finita en compactos)
y sea $\underline{D}(\eta, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \eta([x-r, x+r])$.
Entonces, η es abs. continua $\Leftrightarrow \underline{D}(\eta, x) < \infty$ para η -ctp $x \in \mathbb{R}$.

"dem": Esto es tipo teorema de diferenciación de Lebesgue para medidas de Radon en $\mathbb{R}$ (usa Besicovitch en lugar de Vitali)

Como "bonus" queda que $\underline{D}(\eta, x)$ es algo así como la derivada de Radon-Nykodim de η resp. Leb. (Nota, basta probar que $\eta(A) > 0 \Rightarrow \text{Leb}(A) > 0$ y para eso se hace argumento de cubrimiento)

$\Rightarrow$ Corolario:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\eta, x) d\eta(x) < \infty \Rightarrow \eta \text{ a.c. con densidad } L^2 \right)$$

(Pág 9) $\leftarrow$ (*) $\uparrow$ Besicovitch.

Entonces, nuestro objetivo es mostrar que $\int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x) d\nu_\lambda(x) < \infty$ para casi todo $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Fijamos $I = [\lambda_0, \lambda_1] \subseteq (\frac{1}{2}, 1)$ y queremos calcular:

$$S := \int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x) d\nu_\lambda(x) d\text{Leb}(\lambda)$$

Usando Fatou y la def de $\underline{D}$, tenemos que

$$S \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_I \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda([x-r, x+r]) d\nu_\lambda(x) d\text{Leb}(\lambda)$$

Nos gustaría acotar esto por $\leq C \cdot r$.

Es conveniente integrar una medida conocida $\Rightarrow$ usamos $\nu_\lambda = \mu \circ \pi_\lambda^{-1}$. 4

Entonces, si $\lambda \in I$ tenemos

$$\textcircled{A} = \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda([x-r, x+r]) d\nu_\lambda(x) = \int_{\Omega} \nu_\lambda([\pi_\lambda(\omega)-r, \pi_\lambda(\omega)+r]) d\mu(\omega)$$

Por otra parte, $\nu_\lambda([\pi_\lambda(\omega)-r, \pi_\lambda(\omega)+r]) = \mu(\{z : |\pi_\lambda(z) - \pi_\lambda(\omega)| < r\})$
 si $\omega \in \Omega$

$$= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{z : |\pi_\lambda(z) - \pi_\lambda(\omega)| < r\}} d\mu(z)$$

Entonces, $\forall \lambda \in I$ tenemos que

$$\textcircled{A} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{z : |\pi_\lambda(z) - \pi_\lambda(\omega)| < r\}} d\mu(z) d\mu(\omega)$$

Deducimos que

$$S \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_I \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{z : |\pi_\lambda(z) - \pi_\lambda(\omega)| < r\}} d\mu(z) d\mu(\omega) d\text{Leb}(\lambda)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \text{Leb}(\{\lambda \in I : |\pi_\lambda(z) - \pi_\lambda(\omega)| < r\}) d\mu(z) d\mu(\omega)$$

Fubini

$\Rightarrow$ Queremos estimar:

$$\text{Leb}(\{\lambda \in I : |\pi_\lambda(z) - \pi_\lambda(\omega)| < r\}) = O(r)$$

(al menos para muchos $(z, \omega) \in \Omega \times \Omega$.)

§2: EL CRITERIO DE TRANSVERSALIDAD.

$\in \{-2, 0, 2\}$.

5

$$\phi_{\tau, \omega}(\lambda) = \prod_{\lambda}(\tau) - \prod_{\lambda}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n - \omega_n) \lambda^n$$

Si $|\tau \wedge \omega| = \min\{k : \tau_k \neq \omega_k\}$.

$\Rightarrow \phi_{\tau, \omega}(\lambda) = 2\lambda^{|\tau \wedge \omega|} g_{\tau, \omega}(\lambda)$ donde (si asumimos que $\tau_k > \omega_k$ sin pérdida de gen)

tenemos que $g_{\tau, \omega}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n$ con $b_n \in \{-1, 0, 1\}$.
 $\uparrow$ dependen de τ, ω .

(H) Decimos que $I = [\lambda_0, \lambda_1] \subseteq (0, 1)$ verifica la δ -transversalidad para $\delta > 0$ si $\forall \tau \neq \omega$ y $x \in I$ se cumple que
 si $g_{\tau, \omega}(x) < \delta \Rightarrow (g_{\tau, \omega})'(x) < -\delta$.

Prop: Si se cumple (H) en I (con const. $\delta > 0$) $\Rightarrow$
 $\text{Leb}(\{\lambda \in I / |g(\lambda)| < \rho\}) < 2\delta^{-1}\rho \quad \forall \rho > 0$
 (y $\forall \tau, \omega$)

Nota, esto implica que $\forall \tau, \omega$ vale que

$$\text{Leb}(\{\lambda \in I / |\phi_{\tau, \omega}(\lambda)| < r\}) < \lambda_0^{-|\tau \wedge \omega|} \cdot \delta^{-1} r. \quad \leftarrow I = [\lambda_0, \lambda_1]$$

$$(\text{pues } |g(\lambda)| < \frac{\lambda_0^{-|\tau \wedge \omega|}}{2} r \Rightarrow |\phi_{\tau, \omega}(\lambda)| < r)$$

dem (de la Prop)

Para probar: $\swarrow$ si $\rho > \delta$ fácil pues $\text{leb}(I) < 2$.
 $\searrow$ si $\rho < \delta \Rightarrow$ el conjunto $G_\rho = \{\lambda \in I : g(\lambda) < \rho\}$
 cumple que ahí g es mon. decreciente con derivada $< -\delta$
 $\Rightarrow$ el intervalo con $|g(\lambda)| < \rho$ es a lo sumo $2\delta^{-1}\rho$.

Corolario: Si se cumple (H) en $I \Rightarrow$ para Leb-ctp $\lambda \in I$
 Tenemos que v_λ es a.c. con densidad en L^2 .

dem:

$$\begin{aligned}
 S &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \iint_{\Omega \times \Omega} \text{Leb}(\{\lambda \in I / |\phi_{z,w}(\lambda)| < r\}) d\mu(z) d\mu(w) \leq \\
 &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \iint_{\Omega \times \Omega} \delta^{-1} \lambda_0^{-|\tau \wedge w|} \cancel{r} d\mu(z) d\mu(w) \stackrel{\substack{\uparrow \\ (H) \\ \text{desaparece } r.}}{=} \\
 &= \frac{1}{2\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-k} (\mu \times \mu)(\{(z,w) : |\tau \wedge w| = k\}) \\
 &= \frac{1}{2\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-k} 2^{-k-1} < \infty \quad \text{pues } \lambda_0 > \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

§ 3 CRITERIO PARA UN INTERVALO de (H) .

Def: Una serie de potencias $h: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ se llama función $(*)$
 si para algún $k \geq 1$ y $a_k \in [-1,1]$ se cumple que:

$$h(x) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x^i + a_k x^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} x^i$$

Observaciones:

1) h'' tiene a lo sumo un cero en $(0,1)$.
 (pues h'' es serie de potencias con a lo sumo 1 cambio de signo — EJERCICIO, a explicar —)

2) Si $x_0 \in (0,1)$ es tq $h(x_0) > \delta$ y $h'(x_0) < -\delta$
 $\Rightarrow \forall x \in [0, x_0)$ se cumple $h(x) > \delta$ y $h'(x_0) < -\delta$.

Idea:
 $h(0)=1, h'(0)=-1$
 si no es cierto
 hay más de un
 cero de h'' .

Prop: Si $\exists$ h una funcion* tq $h(x_0) > \delta$ y $h'(x_0) < -\delta$ [7]
 entonces las funciones $g_{z,w}$ cumplen la δ -transversalidad
 en $[0, x_0]$.

dem: Sea $z \neq w$ y $f(x) = g_{z,w}(x) - h(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^l c_i x^i - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i \quad \text{con } c_i \geq 0 \quad \forall i$$

$y \quad l = k-1 \text{ o } l = k.$

Entonces: $\text{pues } h(x) > \delta$

$$g(x) < \delta \xRightarrow{\downarrow} f(x) < 0 \xRightarrow{\textcircled{P}} f'(x) < 0 \xRightarrow{\downarrow \text{pues } h'(x) < -\delta} g'(x) < -\delta.$$

Problemas $\textcircled{P}$:

$$f(x) < 0 \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^l c_i x^i < \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i \right] \textcircled{*}$$

Derivando tenemos $\sum_{i=1}^l c_i i x^{i-1} - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i i x^{i-1} = f'(x)$

~~pero~~ $\sum_{i=1}^l c_i i x^{i-1} \leq l \sum_{i=1}^l c_i x^{i-1}$

y $\sum_{i=l+1}^{\infty} c_i i x^{i-1} \geq (l+1) \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^{i-1}$

Entonces, como $\textcircled{*}$ implica $\sum_{i=1}^l c_i x^{i-1} < \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^{i-1}$
 y $x > 0$

obtenemos que $f'(x) < 0$.

§4 CONSTRUCCIÓN
Para $I = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}^{2/3})$ se usa

8

$$h(x) = 1 - x - x^2 - x^3 + 0.5x^4 + \sum_{i=5}^{\infty} x^i$$

que cumple: $h(2^{-2/3}) > 0.07$ y $h'(2^{-2/3}) < -0.09$.

El caso general es un poco más complicado, pero λ_0 es más grande $\Rightarrow$ se puede arreglar. (decir dos palabras)

§5. APLICACIONES

Mencionan Tsujii y discutir trabajos más recientes:

(Referir a GOUËZEL: "Méthodes entropiques pour les convolutions de Bernoulli" - BOURBACI N°1142 Janvier 2018)

(*) Vamos a ver que si $\underline{D}(\eta, x) < \infty$ para η -c.t.p x

9

$$\Rightarrow \eta \ll \text{Leb} \quad (\text{i.e. } \text{Leb}(A) = 0 \Rightarrow \eta(A) = 0)$$

equivalentemente: $\boxed{\eta(A) > 0 \Rightarrow \text{Leb}(A) > 0}$

Sea $A_n = \{x \in A : \underline{D}(\eta, x) \leq n\} \Rightarrow \eta(A \setminus \bigcup_n A_n) = 0 \Rightarrow \exists n_0$ tq si

$n > n_0 \Rightarrow \eta(A_n) > 0$. Basta mostrar $\text{Leb}(A_n) > 0$. Podemos suponer $A_n \subseteq [-K, K]$ por simpl.

Lemma (Cubrimiento Besicovich)

$\exists C > 0$ (universal) tq si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es un cubrimiento tal que $\forall x \in A$ y $r > 0 \exists I_\alpha \in \mathcal{B}$ tq $x \in I_\alpha$ y $I_\alpha \subseteq B(x, r)$

Entonces, $\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ subcubrimiento de A tq $\forall x \in \mathbb{R} \quad \#\{I \in \mathcal{B}' : x \in I\} \leq C$.

(Obviamente, en $\mathbb{R}$ se debería poder estimar C ; 2, 3? 4? ...)

Cubrimos A_n por intervalos $\{I_x^{r_j(x)}\}_{\substack{x \in A_n \\ r_j(x) > 0}}$ con $I_x^{r_j(x)} = [x - r_j(x), x + r_j(x)]$

tales que $\eta(I_x^{r_j(x)}) < 2n r_j(x) = n \text{Leb}(I_x^{r_j(x)})$.

$\forall r > 0$
Existe, (por Besicovich) $\mathcal{B}'_r = \{I_k\}_{k \geq 0}$ subcubrim con $\text{Leb}(I_k) < r$ y tal que $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \#\{I_k \in \mathcal{B}'_r : y \in I_k\} < C$.

(i.e. $\mathbb{1}_A \leq \sum_k \mathbb{1}_{I_k} \leq C \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$) (A_n contenido en compacto)
↓

Sea $\varepsilon \ll \frac{\eta(A_n)}{nC \cdot 10}$ y $r > 0$ tq $\text{Leb}(B_r(A_n)) < \text{Leb}(A_n) + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Leb}(B_r(A_n)) &> \text{Leb}(\bigcup I_k) \geq \frac{1}{C} \sum \text{Leb}(I_k) \geq \frac{1}{nC} \sum \eta(I_k) \geq \frac{1}{nC} \eta(\bigcup I_k) \\ &\geq \frac{1}{nC} \eta(A_n) > 10\varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{Leb}(A_n) > 9\varepsilon > 0 \quad \checkmark$