

$\dot{x} = X(x)$ ecuación diferencial.

Describe la evolución de un sistema (mecánico, económico, eléctrico, ~~psico~~ demográfico, ...)

Nos describe "infinitesimalmente" como varían las coordenadas al transcurrir el "tiempo":

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

usualmente sistema de "coordenadas" en $\mathbb{R}^n$.

estocástica, asintótica

dato x : queremos entender $\{ \varphi_t(x) \}_{t \rightarrow \infty}$

Evolución $\rightsquigarrow$ Dinámica

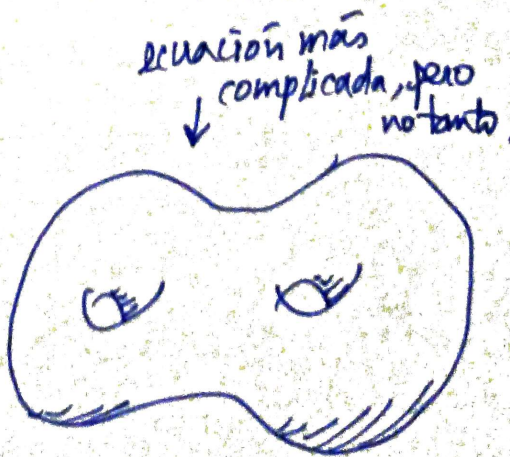
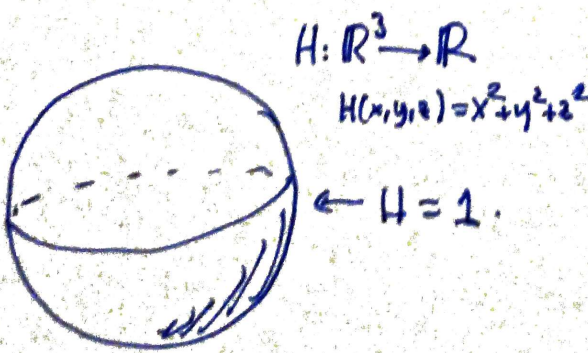
Es común que las variables del sistema no sean "independientes"
 $\Rightarrow$ que haya "cantidades conservadas":

$$H_1, \dots, H_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \frac{dH_i}{dt} = 0$$

Podemos restringir a $\{H_i = \text{cte}\}$: se llama "variedad diferencial".

Su "forma" $\rightsquigarrow$ Topología.

Ejemplos:



Objetivo (de esta charla)

2

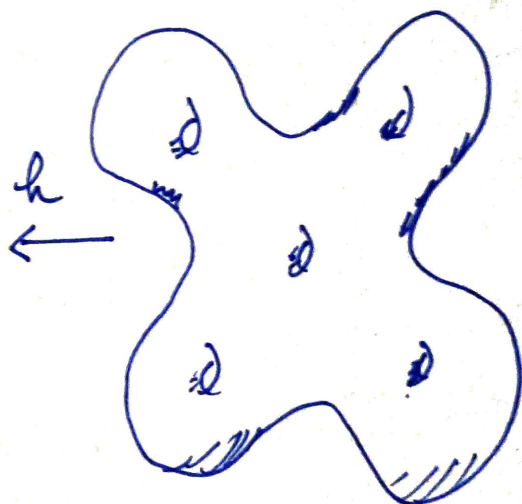
Encontrar conclusiones concretas sobre la asintótica de sistemas a través de información "a priori" como puede ser la "topología" de M ~~o~~ la ecuación (esp. de fase)

o geometría (a ser explorado) que se detecte "fácil" y de forma "robusta".

Ejemplo sencillo: Campos gradientes y teoría de Morse

Si h es una función "genérica"

→ $\dot{x} = -\nabla h(x)$ es la dinámica que intenta "bajar".
(ojo, no es 'sujeto' a gravedad)



La descripción dinámica de esta ecuación queda restringida por la topología

La topología queda determinada por la dinámica: conjunto de puntos críticos y sus índices determinan ciertos invariantes (Homología) de la variedad.

→ eg: en



tiene que haber puntos "silla"

en S^2



puede no haber.

Por varias razones vamos a considerar sistemas discretos (modelos de evolución a tiempo discreto).

3

M variedad cerrada:    productos, ...

$f: M \rightarrow M$ una transformación suave (biyección diferenciable con inversa diferenciable)

La evolución futura de x será $\{f^n(x)\}_{n \geq 0}$ $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$

En esta dirección hay un resultado general (atribuido a Conley) que dice:

Teorema: ~~Para cualquier~~ $\exists h: M \rightarrow \mathbb{R}$ función de

Lyapunov: 1) $h(f(x)) \leq h(x) \quad \forall x \in M$

la igualdad es si y solo si x tiene alguna recurrencia. (Recurrencia por cadenas)

2) h distingue las clases de recurrencia:

Si x, y son recurrentes en clases de rec. diferentes

$\rightarrow \exists c \in (h(x), h(y))$ que no es imagen de punto recurrentes por cadenas.

2 comentarios: 1) Recurrencia por cadenas es 'débil', lo cual explica la fuerza del resultado.

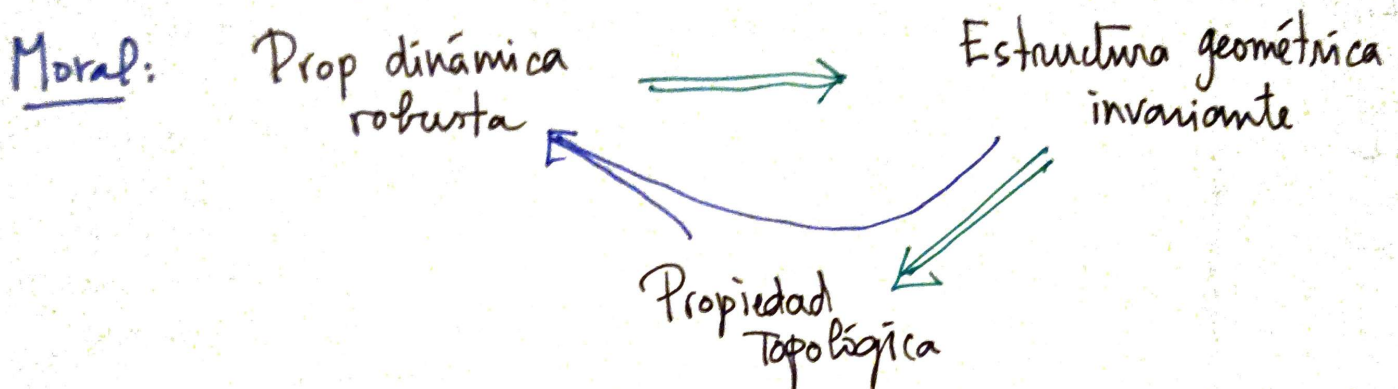
2) La dicotomía

recurrente por cadenas vs $\exists$ región atractora.

Pregunta: ¿Es posible, a partir de la información de h y la dinámica en las "piezas" describir la topología de M ?

Muy exitoso en 60's, 70's para dinámicas "hiperbólicas" (aún hay prog. abiertas, díf. 4)
 fallan para casos más generales, y desde entonces ha sido un desafío entender mejor.

[Objetivo: Explicar resultados en esa dirección, en dimensiones bajas (dim 2 y 3).



Ejemplo: (Mañé-Franks, Bonatti-Crovisier)

$f: M \rightarrow M$ con M sup. cerrada
 es rob. recurrente por cadenas
 (rob. sin atractor propio)



$\iff$

f es Anosov (hiperb.)
 y conjugado a
 automorfismo lineal
 de $\mathbb{T}^2 \simeq S^1 \times S^1$
 $\simeq \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$

En dimensión 3, ^(y más) hay avances
 considerables en ambas direcciones
 $\Rightarrow, \Rightarrow$, pero la vuelta $\Leftarrow$ no ha visto muchos
 avances.

e.g. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La estructura natural se llama hiperbolicidad parcial

Es estructura geométrica, de dex Df -invr $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$
 con props dinámicas.

Se detecta en finitos iterados. Hay foliaciones invariantes

Denotamos $PH^*(M^3)$ el conjunto (abierto) de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de una 3-variedad cerrada M conexa. [5]

Entonces, ~~tenemos~~ tenemos el siguiente resultado general:

Teorema (j.c. S. Crovisier) $\exists \mathcal{O}_a$ y $\mathcal{O}_t$ abiertos de $PH^*(M)$
t.q. $PH^*(M) = \overline{\mathcal{O}_a \cup \mathcal{O}_t}$ t.q.:

- 1) si $f \in \mathcal{O}_a \Rightarrow \exists$ attractor propio $f(\bar{U}) \subseteq U$ $U \neq \{\emptyset, M\}$ ($\exists U^ab$)
- 2) si $f \in \mathcal{O}_t \Rightarrow f$ es transitivo (top. mixing) y W^u es foliación minimal.

Se usa para obtener

Teorema (j.c. A. Avila, S. Crovisier, A. Eskin, A. Wilkinson y Z. Zhang)
En $\mathcal{O}_t$ hay abierto y denso $\mathcal{O}_{SRB}$ t.q. $\forall f \in \mathcal{O}_{SRB}$ de clase C^∞ existe una única medida μ -Gibbs que además es SRB y física.

TCL, grandes desvíos
Permite obtener teoremas límite, hacer estadística más precisa de las órbitas.

Teorema (j.c. S. Crovisier) $\exists$ clases de isotopía de difeos (topología)
donde $\mathcal{O}_a = \emptyset$. (Precisamente $M = \mathbb{T}^3$, $f \sim$ Anosov)

Herramientas: $\rightarrow$ "dinámica a gran escala"
 $\rightarrow$ foliaciones y su vínculo con la top de 3-variedades
 $\rightarrow$ técnicas de dinámica hom. & teichmüller (exp. drift) $\rightarrow$