

CLASIFICACIÓN SUPERFICIES TOPOLOGICAS.

[Teorema A Toda superficie admite estructura diferenciable]

[Teorema B Todo homeo entre superficies suaves es isotópico a un difeomorfismo.]

[Corolario: Toda superficie admite una única estructura diferenciable (que gracias a la clasificación de superficies triangulables/diferenc. es difeomorfa a alguna de la "lista".)]

(Handle smoothing)

[Resultado Clave: Sea S superficie diferenciable $\Rightarrow$

(0) Un encaje topológico de $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es isotópico a uno que es encaje suave en entorno de 0 quedandose fija la isotopía ^{fuera de} en un entorno dado (mayor) de 0 .

(1) Un encaje topológico $D^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S$ que es suave cerca de $\partial D^1 \times \mathbb{R}$ es isotópico a uno que es encaje suave en entorno de $D^1 \times \{0\}$ con la isotopía fija fuera de otro entorno (mayor) de $D^1 \times \{0\}$.

(2) Un encaje topológico $D^2 \rightarrow S$ que es ^{encaje} suave en un entorno de ∂D^2 es isotópico a encaje suave con isotopía fija en entorno de ∂D^2 .

[Nota: Encaje suave es encaje topológico diferenciable + diferencial no singular en todo punto ($\approx$ inversa diferenciable)]

dem (Teorema A) Sean $\{h_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow S\}_{i=1}^k$ sistemas de coordenadas que cubren S (compacta)

Sea $U_n = \bigcup_{i=1}^n h_i(\mathbb{R}^2)$ con $n \leq k$ (k podría ser ∞ sin problema)

La idea es empezar en U_1 con la estructura diferenciable inducida por h_1 e ir inductivamente extendiendo la estructura diferenciable.

Supongamos que cambiamos $h_2, \dots, h_{n-1}$ tq cambios de cartas entre $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$ son suaves.

Sea ~~U_n~~ $W = h_n^{-1}(U_{n-1}) \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto con $U_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} h_i(\mathbb{R}^2)$

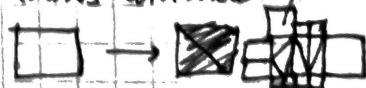
Queremos cambiar h_n en W dejándola fija en $\mathbb{R}^2 \setminus W$ de forma tal que $\forall x \in \hat{h}_n^{-1}(U_{n-1}) \cap W$ se cumpla que

$D_{h_i(x)}^{-1} \circ D_x \hat{h}_n$ exista y sea no singular.

Si hacemos esto $\rightarrow$ obtuvimos una forma de extender la estructura diferenciable a $U_n = \bigcup_{i=1}^n h_i(\mathbb{R}^2)$. Por inducción esto prueba el Teo A.

Para construir $\hat{h}_n$ lo que hacemos es triangular W con triángulos de diámetro que tiende a 0 cuando se acercan a ∂W .

[Para hacer eso usaremos $\mathbb{R}^2$ por cuadrado de lados diagonales y vamos tomando aquellos en W , luego cambiamos



Ahora, usamos HS para corregir h_n , primero en entornos disjuntos de vértices lejos de ∂W , luego en aristas (entornos disjuntos, lejos de ∂W) y por último a los interiores.

dem (Teorema B) Sea $f: S \rightarrow S$ homeo de superficie suave S .

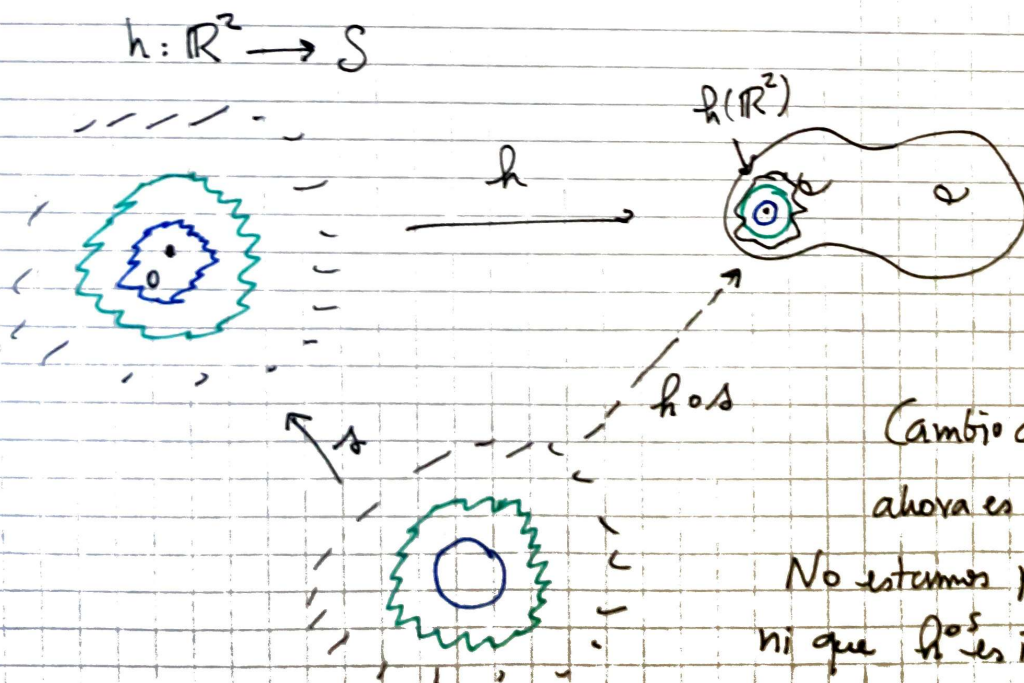
Tomamos una triangulación de S .

Isotopamos primero f para ser suave en vértices, luego aristas y por último caras. Esto liquida. $\square$

Prueba de Handle Smoothing

[Primero 0-Handles (asumiendo Schoenflies) que es el caso más difícil.]

[Schoenflies: Sea γ curva de Jordan de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists h_\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeo que manda γ en S^1 .]



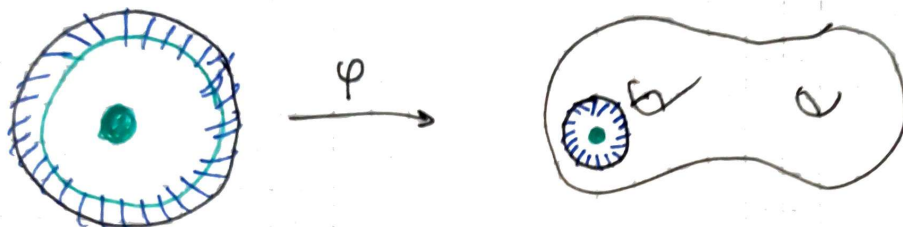
Cambio de homeo que ahora es difeo.

No estamos probando isotopía, ni que $h \circ s$ es igual fuera de un entorno. Pero lo que estamos probando alcanza para mostrar el Teo A (al menos las "esquinas")

Veamos ahora la prueba gral, y sin Schoenflies.

2-Handles:

$\varphi: \mathbb{D}^2 \rightarrow S$ homeo tq $\varphi|_U$ ~~es~~ difeo sobre imagen
con U entorno de $\partial\mathbb{D}^2$.



La clave es que si consideramos la estructura diferenciable en $\mathbb{D}^2$ dada por φ^{-1} de la estructura en S entonces

coincide en $\partial\mathbb{D}^2$. Afirmamos que por clasificación de superficies es la misma estructura y como es estandar en un entorno de $\partial\mathbb{D}^2$ encontramos un homeo

$$g: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \text{ tal que}$$

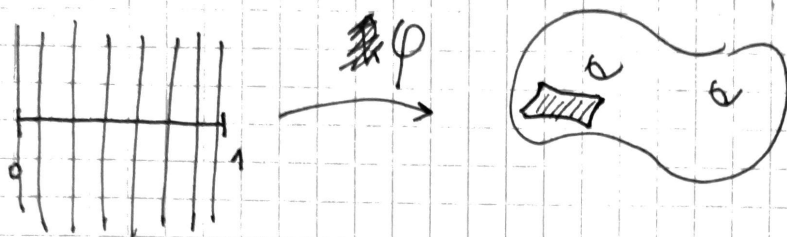
g^{-1} manda ~~en~~ la estructura $\varphi^{-1}(\text{estr de } S)$ en la estructura estandar. Entonces $\varphi \circ g$ es un encaje diferenciable de $\mathbb{D}^2 \rightarrow S$ que coincide con φ en entorno de $\partial\mathbb{D}^2$.

Para hacer la isotopía, aplicamos el truco de Alexander:

Definimos $g_t: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 /$
$$g_t(x) = \begin{cases} tg(tx) & \text{si } |x| < \frac{1}{t} \\ x & \text{si } |x| \geq \frac{1}{t} \end{cases}$$

Entonces, $g_0 = \text{id}$, $g_1 = g$ y g_t es homeo $\forall t$. y $\varphi \circ g_t$ es ~~la~~ la isotopía buscada.

1-Handles : Tenemos $\varphi: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow S$ que es suave en un entorno de $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R})$



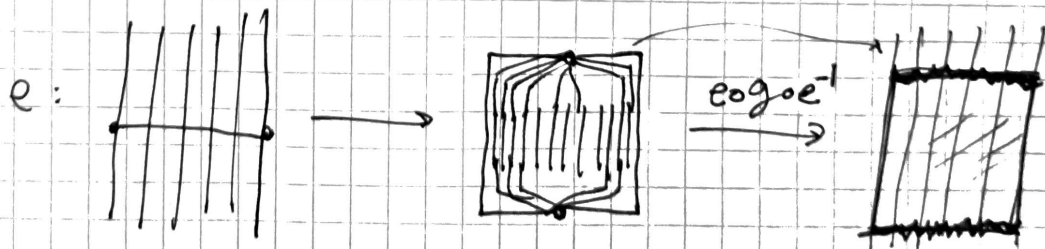
Consideramos la estructura diferenciable en $[0,1] \times \mathbb{R}$ obtenida tirando la de S para atrás por φ !

Nuevamente, por la clasificación, $\exists g: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \times \mathbb{R}$ homeo que es la identidad en el borde _(entorno) y que manda la estructura φ^* (estr. de S)

en la estándar. $\varphi \circ g$ es encage suave, pero queremos que coincida con φ fuera de entorno de la identidad y que sea una isotopía.

Sea $e: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que es la identidad en un entorno de $[0,1] \times \{0\}$ y cuya imagen está contenida en $[0,1] \times [-1,1]$

Por ejemplo:



Consideramos $e \circ g \circ e^{-1}$ y lo podemos extender a un homeo G de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ G que es la identidad fuera de un entorno de $[0,1] \times [1]$ y tal que coincide con g en entorno de $[0,1] \times \{0\}$. Ahora G_t con $G_0 = \text{id}$, $G_1 = g$ cumple que $\varphi \circ G_t$ va de una estructura a la otra.

Caso difícil 0-Handles

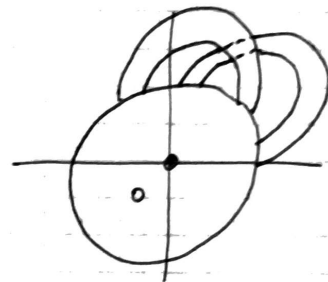
Sea $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ encastre topológico

Consideramos $T = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ un toro y $0 \in T$ lo fijamos.

Elegimos $\alpha \in T \setminus \{0\}$ y consideramos $T' = T \setminus \{\alpha\}$.

Sea $\psi: T' \rightarrow \mathbb{R}^2$ encastre top. tal que
Consideramos $\psi(0) = 0$.

$\psi(T') =$



Consideramos $\hat{T}'$ a T' con la estructura diferenciable
obtenida por $\psi \circ \varphi^{-1}$ (estr. de S)

Afirmamos 2 cosas:

(1) $\exists$ compacto en $\hat{T}'$ cuyo complemento es difeomorfo a $S \times \mathbb{R}$
Esto permite agregar un punto a $\hat{T}'$ y tener una estructura
~~topológica~~ diferenciable en $\hat{T} = \hat{T}' \cup \{\alpha\}$ que va a ser homeomorfo
a T .

(2) ~~$\hat{T}$~~ y T son difeomorfos (clasif. de sup.
diferenciables)

Sea $g: \hat{T} \rightarrow T$ un difeomorfismo entre las estructuras diferenciables.

Podemos suponer (rotando en T) que $g(0) = 0$. Tb podemos
suponer que g induce la identidad en π_1 . (Notar que $\hat{T}$ y T
son el mismo espacio topológico, entonces g es un homeo de espacio
en sí mismo, pero son "diferentes" como variedades diferenciables)

Para esto último, componemos con matriz de $GL_2 \mathbb{Z}$.

Sea $\tilde{g}$ levantamiento de g a $\mathbb{R}^2$ que fija 0.

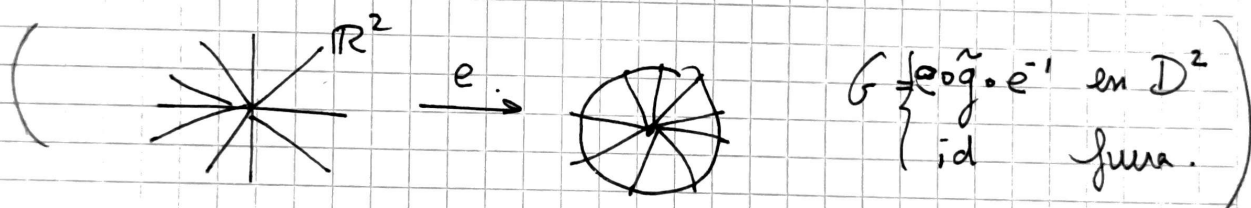
$\tilde{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeo con $\boxed{\tilde{g}(x+n, y+m) = \tilde{g}(x, y) + (n, m)}$

tg manda la estructura dif levantada de $\hat{T}$ en la usual.

→ Implica que $|\tilde{g}(x, y) - (x, y)| \leq K$ uniforme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Reparametrizando $\Rightarrow$ podemos construir homeo $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tg

$G = \tilde{g}$ en entorno de 0, $G = \text{id}$ fuera de D^2



Ahora aplicamos el truco de ~~Alexander~~ Alexander para llevar la G_t de id a G

Se va a cumplir que $\varphi \circ G^{-1}$ cumple lo deseado
y es isotópico vía $\varphi \circ G_t^{-1}$ a φ .

