

Problema #5 de Hilbert.

5. LIE'S CONCEPT OF A CONTINUOUS GROUP OF TRANSFORMATIONS WITHOUT THE ASSUMPTION OF THE DIFFERENTIABILITY OF THE FUNCTIONS DEFINING THE GROUP.

It is well known that Lie, with the aid of the concept of continuous groups of transformations, has set up a system of geometrical axioms and, from the standpoint of his theory of groups, has proved that this system of axioms suffices for geometry. But since Lie assumes, in the very foundation of his theory, that the functions defining his group can be differentiated, it remains undecided in Lie's development, whether the assumption of the differentiability in connection with the question as to the axioms of geometry is actually unavoidable, or whether it may not appear rather as a consequence of the group concept and the other geometrical axioms. This consideration, as well as certain other problems in connection with the arithmetical axioms, brings before us the more general question: *How far Lie's concept of continuous groups of transformations is approachable in our investigations without the assumption of the differentiability of the functions.*

Hilbert acerca de los problemas ↴

It is by the solution of problems that the investigator tests the temper of his steel; he finds new methods and new outlooks, and gains a wider and freer horizon.

It is difficult and often impossible to judge the value of a problem correctly in advance; for the final award depends upon the gain which science obtains from the problem. Nevertheless we can ask whether there are general criteria which mark a good mathematical problem. An old French mathematician said: "A mathematical theory is not to be considered complete until you have made it so clear that you can explain it to the first man whom you meet on the street."

The product of mathematics is clarity and understanding. Not theorems, by themselves. Is there, for example any real reason that even such famous results as Fermat's Last Theorem, or the Poincaré conjecture, really matter? Their real importance is not in their specific statements, but their role in challenging our understanding, presenting challenges that led to mathematical developments that increased our understanding.

W. Thurston MathDreaflow (2010)

Grupos de Lie

Son varias estructuras simultaneas:

1) Grupos: simétricos

- objetos geométricos
- combinatorias
- algebraicas, ...

(Un grupo es un conjunto G con una operación asociativa, con neutro e inverso; todo grupo es un subconjunto cerrado de las biyecciones de otro conjunto con la operación de composición.)

2) Grupos topológicos: Son grupos con una topología compatible con sus operaciones.

Típicamente, si miramos transformaciones continuas de un espacio topológico $\rightarrow$ estas vienen con una topología natural que nos permite indicar si la transformación "está cerca de la identidad".

Ejemplo: Los enteros p -ádicos $\mathbb{Z}_p$ (no es $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

Una descripción: $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ tal que (con top. producto)

$$\underline{x} = \{x_n\}_{n \geq 0} \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} = \{z_n\}_{n \geq 0} \text{ definido inductivamente}$$

$$\underline{y} = \{y_n\}_{n \geq 0}$$

como $z_n = x_n + y_n + \delta_n$ con

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n-1} + y_{n-1} + \delta_{n-1} \leq p-1 \\ 1 & \text{si } x_{n-1} + y_{n-1} + \delta_{n-1} \geq p. \end{cases}$$

"adding machine".

El $\underline{0} = (0, 0, \dots)$ es el neutro.

El $-\underline{x} = (p-x_0, p-x_1-1, p-x_2-1, \dots)$

(ejemplo: $p=2$ el inverso de $(1, 0, 0, \dots)$ es $(1, 1, 1, 1, \dots)$)

(Otra forma: Tomar los racionales $\mathbb{Q}$, definir una norma p -ádica, completar y tomar aquellos que tienen "valuación" positiva.)

Obs: En $\mathbb{Z}_p$ hay "subgrupos pequeños":

De hecho, $S_n = \{x = \{x_n\}_{n \geq 0} \in \mathbb{Z}_p + q \mid x_i = 0 \text{ si } i < n\}$
es un subgrupo cerrado (y abierto).

Notar que $\mathbb{Z}_p / S_n \cong$ Grupo abeliano finito $\cong (\mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z})$
cíclico.

Esto permite pensar en estructura de límite inverso

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z} / p^3 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} / p^2 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} / p \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Idea que permite construir muchos otros grupos topológicos interesantes
a partir de grupos finitos. (grupos pro-finitos)

3) Grupos de Lie: Son grupos topológicos con la estructura
adicional de ser variedades diferenciables.

Ejemplos:

$$\rightarrow GL_d(\mathbb{R}) = \{\text{matrices } d \times d \text{ invertibles}\}$$

$$\rightarrow SL_d(\mathbb{R}) = \{g \in GL_d(\mathbb{R}) : \det(g) = 1\}$$

$$\rightarrow SO(p, q) = \{g \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) / g \text{ deja } x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \text{ invariante}\}$$

⋮

↖ Grupos de matrices.

Obs: No tienen grupos "pequeños", $\nexists$ distancia (norma de matriz)

y $\varepsilon > 0$ tq $\forall g \in B(\text{id}, \varepsilon)$, $\exists n > 0$ tq $g^n \notin B(\text{id}, \varepsilon)$.

dem: Si g tiene v.p. de módulo $\neq 1 \Rightarrow$ obvio.

Si todo v.p. es de módulo $= 1 \Rightarrow$ a) Jordan $\Rightarrow$ ok.

b) "rotación" $\Rightarrow$ ángulo pequeño, iterado se va.

(usando la exponencial se puede dar una prueba conceptual $\square$ que generaliza a TODO grupo de Lie.)

¿Qué dice el problema 5 de Hilbert?

Se puede eliminar la hipótesis de ser variedad diferenciable y seguir sabiendo que el grupo tiene "las mismas características"

Nota: Hay grupos topológicos que no son "siquiera" localmente euclídeos.

moderna

Formulación
precisa
aceptada

(una de las, pero
razonablemente
popular)

Sea G un grupo topológico localmente euclídeo; es G un grupo de Lie?

(es decir, $\exists$ estructura diferenciable (única) en G que lo hace grupo de Lie?)

Problema resuelto:

La respuesta es sí (Montgomery-Zippin; ~1950)
Gleason

La prueba de Gleason fue luego refinada por Yamabe (~1953)
para obtener una versión más satisfactoria:

Teorema (Gleason-Yamabe) Si G es un grupo topológico
localmente compacto sin "subgrupos pequeños" entonces
 G admite una (única) estructura de grupo de Lie.

↑ el resultado de Yamabe
es de hecho más general.

→ $\exists U$ entorno de la identidad
tq no $\exists G' \subseteq U$ subgrupo

NOTA: No es obvio que "localmente euclídeo"
 $\Rightarrow$ sin "subgrupos pequeños"

Otras formulaciones:

* Version local $\leftarrow$ Falso (Enflo ~1970)
(Ciertas otras interpretaciones...)

* Hilbert-Smith: Sea G grupo topológico

tq admite morfismo continuo e inyectivo en $\text{Homeo}(M)$
con M variedad; es G grupo de Lie?



Problema abierto. (Se sabe en algunos casos,
eg. Si es $\text{Lip}(M)$ en lugar de $\text{Homeo}(M)$
 $\hookrightarrow$ Repovš - Ščepin '97
Si $\dim M \leq 3 \rightarrow \text{Pardon (2013)}$)

Abre puertas a otra pregunta: ¿Qué grupos actúan en variedades?
ver: K. Mann, "The structure of homeomorphism and diffeomorphism groups"
Notices AMS vol 68 nº4 (2021)

§ ALGUNAS APLICACIONES

$\rightarrow$ Sea M variedad Riemanniana

$\Rightarrow \text{Isom}(M) \subseteq \text{Diff}(M)$ es un grupo de Lie
(corolario "directo" de Gleason-Yamabe, pero tb se puede demostrar "a mano")

$\rightarrow$ Teorema de Gromov: Sea Γ un grupo
finitamente generado con crecimiento polinomial
 $\Rightarrow \Gamma$ es virtualmente nilpotente.

(Otras aplicaciones; e.g. combinatoria aditiva, ver libro de Terence Tao sobre el problema 5 de Hilbert ...)

§ ALGUNAS IDEAS DE ESTRATEGIA/PRUEBA

Vale la pena comenzar por un resultado más sencillo, con un sabor similar:

Teorema (Cartan / Von Neumann ~ 1930)

Sea $H < G$ un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G . Entonces, H es un subgrupo de Lie.

Idea: Supongamos que H acumula en la identidad

(sino H es discreto $\Rightarrow$ de Lie)

Objetivo, construir un grupo a 1-parámetro dentro de H .

Usamos el mapa exponencial $\exp: T_{\text{id}} G \rightarrow G$

dado por $\exp(X) = \varphi_X(1)$ donde $\varphi_X(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = \tilde{X}(x)$ por $x = \text{id}$

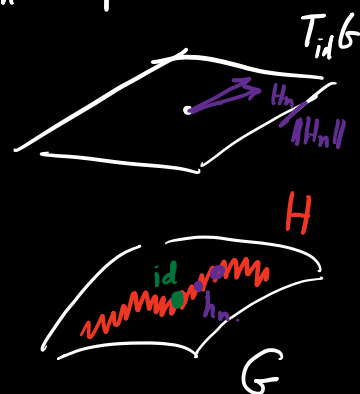
siendo $\tilde{X}(p) = D_{\text{id}} L_p(X)$ con $L_p: G \rightarrow G$ es $x \mapsto px$.

Se puede ver que $\exp: T_{id}G \rightarrow G$ es un difeo de un entorno de $0 \in T_{id}G$ en un entorno de id en G .

Si $h_n \rightarrow id$, tomamos $H_n \in T_{id}G$ tq $h_n = \exp(H_n)$

Entonces, elegimos subsucesión tal que

$$\frac{H_n}{\|H_n\|} \rightarrow H_\infty \in T_{id}G \text{ de norma } 1.$$



Afirmación: $\varphi(t) = \exp(tH_\infty) \subseteq H$.

dem: Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$. Como $h_n \rightarrow id$, $\Rightarrow \|H_n\| \rightarrow 0$

Sea $k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tq $|t_0 - k_n \|H_n\|| \rightarrow 0$.

Como H es subgrupo $\Rightarrow h_n^{k_n} = \exp(k_n H_n) = \exp(H_n)^{k_n} \in H$

Como H es cerrado $\Rightarrow h_n^{k_n} \rightarrow h_\infty \in H$

Por continuidad de $\exp$, $h_\infty = \exp(t_0 H_\infty) \Rightarrow \varphi(t_0) \in H$

De forma similar, podemos definir

$\mathcal{H} \subseteq T_{id}G$ como los vectores $X \in T_{id}G /$

$\exp(tX) \in H$ y una prueba similar implica que

existe un entorno de id en G donde $\exp^{-1}(H) \subseteq \mathcal{H}$.

Eso prueba que H es grupo de Lie. $\square$

Observación: Un modelo local de un entorno de id en G está dado por el espacio de grupos a un parámetro

$$U(G) = \{ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow G \text{ morfismo continuo} \}$$

A $U(G)$ le ponemos la topología de la convergencia uniforme y vía $\exp$ se puede identificar $U(G) \simeq T_{\text{id}}G$
(álgebra de Lie de G)

Otra observación: Si $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ grupo continuo a un parámetro $\Rightarrow$ es automáticamente liso (de hecho analítico) pues $\exists X / \varphi(t) = \exp(tX)$.

Lo bueno es que $U(G)$ tiene sentido para grupos topológicos en general: Sea G grupo topológico

$$U(G) = \{ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow G \text{ homomorfismo continuo} \}$$

En $U(G)$ usamos topología de convergencia en compactos

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ si } \forall T > 0 \text{ tenemos } \varphi_n|_{[-T, T]} \Rightarrow \varphi|_{[-T, T]}$$

Claramente, si $\varphi \in U(G)$, podemos definir

$$\lambda\varphi \in U(G) \text{ como } (\lambda\varphi)(t) = \varphi(\lambda t)$$

Problema: ¿Es posible definir $\varphi + \psi$ si $\varphi, \psi \in U(G)$?

$$\underline{\text{Idea}}: (\varphi + \psi)(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(t/n) \psi(t/n))^n$$

Esta idea hace agua por todos lados:

- ¿pq es conmutativo?
- ¿pq tiene límite?
- ¿pq está en $U(G)$?

Asumiendo que se puede, tb es relevante encontrar propiedades de $U(G)$ que sean "buenas".

Un resultado clásico que es útil:

Prop: Sea V un espacio vectorial topológico localmente compacto $\Rightarrow V \cong \mathbb{R}^d$ para algún d .

Ejemplo peligroso: $T^\infty = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_{>0}}$ el toro infinito
 con la topología producto es un grupo topológico compacto.
 Notar que $U(T^\infty)$ es medio grande.

↖ T^∞ tiene subgrupos pequeños: $\{0\}^n \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_{>n}}$
 Son subgrupos que convergen a la identidad.

Una de las ideas clave que introduce Gleason es la de poner
 una métrica en el grupo G que hoy se conoce como
 métrica de Gleason.

Def: Sea G un grupo topológico. Una métrica de Gleason en G
 es una distancia invariante a izquierda
 $d: G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

que genera la topología de G y cumple que $\exists C > 0$ t.q.

(i) (Propiedad de escape) Si $g \in G$ es t.q. $d(g, id) \leq \frac{1}{Cn}$
 entonces $d(g^n, id) \geq \frac{n}{C} d(g, id)$

(ii) (Propiedad de conmutadores) Si $g, h \in G$ están en $B_{1/C}(id)$
 entonces:
 $d([g, h], id) \leq C d(g, id) \cdot d(h, id)$

Teorema: Si G es un grupo topológico localmente compacto
con una métrica de Gleason $\Rightarrow$ es un grupo de Lie.

Idea: Con estas propiedades se puede probar que $U(G)$
es un espacio vectorial topológico localmente compacto
y aplicar una estrategia similar a la del teorema
de Cartan-Von Neumann.



¿Cómo construir métricas de Gleason?

Herramientas: $\rightarrow$ Medida de Haar.

$\rightarrow$ No existencia de grupos pequeños
(son claramente obstrucción para la
propiedad de escape)

$\rightarrow$ Teorema de Peter-Weyl.

$\rightarrow$ etc...

$\rightarrow$ (esto sirve para mostrar el
caso compacto, que es necesario
para demostrar que
localmente euclídeo
 $\Rightarrow$ sin subgrupos
pequeños)

§ SI EL TIEMPO PERMITE.

El caso compacto.

Teorema (Von Neumann) Sea G grupo topológico compacto y localmente euclideo $\Rightarrow G$ es grupo de Lie.

2 etapas:

1) Peter-Weyl: $\forall U$ entorno de $\text{id} \in G$ existe $n > 0$ y $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ morfismo continuo tal que $\text{Ker } \rho \subseteq U$

2) Lo anterior da estructura de límite inverso a G

Es decir: $\exists N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_k$ tq $\bigcap_{k \geq 1} N_k = \{\text{id}\}$

de forma tal que $G \cong \varprojlim G/N_k$

Hay que usar que G es localmente euclideo para ver que este límite no puede ser muy "feo".