Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática I
Curso 2007

Examen 2/08

1. Se considera la función $f(x) = e^{e^x}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   a) Calcular su derivada y deducir que f es creciente. Mostrar que $f : \mathbb{R} \to (1, +\infty)$ es sobreyectiva. Probar que f es también inyectiva.

   b) Si $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ es la función inversa de f, mostrar que la derivada de g se calcula por la fórmula: $g'(y) = \dfrac{1}{y \log y}$.

   c) Calcular $\int_e^{e^2} \dfrac{1}{y \log y} dy$.

2. Se considera la función $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para $-1 \leq a \leq 1$ y dada por la fórmula: $f_a(x) = \dfrac{1}{1 + (1 - a^2)x^2}$.

   a) Estudiar para que valores del parámetro a, $\int_0^\infty f_a(x)dx$ converge y calcular explícitamente el valor de esta integral.

   b) Mostrar que el área debajo del gráfico de f_a, es mínima para la función correspondiente al valor $a = 0$.

3. Se considera la función real f dada por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

   a) Estudiar el dominio de definición y hallar los extremos relativos de f.

   b) Bosquejar su gráfico.

   c) Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

   (i) Determinar los puntos fijos y clasificarlos.

   (ii) Determinar por el método gráfico el

$$\lim_{n \to \infty} x_n$$

   para las condiciónes iniciales $x_0 = -2$, y $x_0 = 2$.

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática I
Curso 2007

Soluciones del examen 2/08

1. *a*) Por la regla de la cadena
$$f'(x) = e^{e^x} e^x.$$
Como $f' > 0$ para todo x, f es creciente. Dado $y > 1$ al resolver la ecuación $y = f(x)$ tomando logaritmos dos veces obtenemos una única solución dada por $x = \log\log y$. Esto prueba que es sobreyectiva (porque existe la solución) y que es inyectiva (porque la solución es única).

   b) Según calculamos en la parte anterior
$$g(y) = \log\log y.$$
Nuevamente la regla de la cadena nos da $g'(y) = \dfrac{1}{y\log y}$.

   c) Como sabemos la primitiva
$$\int_e^{e^2} \frac{1}{y\log y} dy = \Big[\log\log y\Big]_e^{e^2} = \log 2.$$

2. *a*) Si $a \neq \pm 1$ tenemos cuando $x \to \infty$ que $f_x(x) \sim \dfrac{1}{(1-a^2)x^2}$. y la integral converge por converger $\int_1^\infty (1/x^2)dx$. Si $a = \pm 1$ la función es constante y la integral no converge. Cuando es convergente, mediante el cambio de variable $\sqrt{1-a^2}x = t$ obtenemos
$$\int_0^\infty f_a(x)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}.$$

   b) Derivando la expresion anterior y analizando su crecimiento se obtiene el mínimo en $a = 0$, que vale $\frac{\pi}{2}$.

3. Se considera la función real f dada por
$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

   a) La función está definida para x real, $x \neq 0$. $f'(x) = 0$ da raices $x = \pm\sqrt{2}$. Del signo de la derivada resulta $x = -\sqrt{2}$ un máximo, donde $f(\sqrt{-2}) = -\sqrt{2}$ y el punto $x = \sqrt{2}$ un mínimo, donde $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Ambos extremos son relativos.

   b) Bosquejar su gráfico.

   c) (i) Los puntos fijos resultan de resolver $f(x) = x$, cuyas soluciones son $x = \pm\sqrt{2}$. Determinar los puntos fijos y clasificarlos.

   (ii) Para $x_0 = -2$ tenemos $x_n \to -\sqrt{2}$, y para $x_0 = 2$ tenemos $x_n \to \sqrt{2}$.