Distribución del máximo de un proceso de Lévy y aplicaciones en finanzas y matemática actuarial [1]

Ernesto Mordecki[2]
Facultad de Ciencias, Centro de Matemática
Iguá 4225. CP 11400. Montevideo. Uruguay

25 de julio de 2003

[1] Notas del Curso de la I Escuela de Invierno de Análisis Estocástico y Aplicaciones, 28 de julio al 1 de agosto de 2003, Valparaíso. Disponible en `http://www.cmat.edu.uy/~mordecki`

[2] mordecki@cmat.edu.uy

Presentación.

En el curso *Distribución del máximo de un proceso de Lévy y aplicaciones en finanzas y matemática actuarial* nos proponemos obtener soluciones cerradas, exactas, para la *distribución del máximo* de procesos de Lévy. Las soluciones obtenidas, equivalentes al problema de la determinación de la probabilidad de ruina del opuesto del proceso, nos permitirán obtener soluciones explícitas para problemas de parada óptima para esta familia de procesos, mediante resultados que relacionan las soluciones de estos dos problemas. Este segundo problema, el de parada óptima, encuentra entre sus aplicaciones la valuación de opciones americanas perpetuas, de interés en matemática financiera.

Como el objetivo es obtener soluciones exactas, debemos restringir la clase de procesos de Lévy que consideramos. En forma análoga a lo que ocurre con los paseos al azar, para calcular la distribución del máximo, (o, en forma equivalente, calcular la probabilidad de ruina) debemos determinar la distribución de los saltos positivos del proceso (negativos, si se trata de la ruina).

Partiendo entonces del modelo clásico de Cramér-Lundberg, consistente en un proceso de Poisson compuesto con saltos positivos exponenciales, se introducen tres modificaciones que lo generalizan:

(i) un componente gaussiano (un proceso de Wiener) que puede interpretarse como una perturbación del modelo clásico,

(ii) se agrega una estructura de saltos negativos arbitraria, y

(iii) se impone que la distribución de los saltos positivos sea de tipo fase, (generalizando la distribución exponencial de los saltos).

El proceso que se obtiene es un proceso de Lévy, con la única restricción de tener saltos positivos con intensidad finita, y distribuciones de tipo fase.

Una vez definido el proceso de Lévy anterior, calculamos la distribución del máximo, y estudiamos algunos casos particulares.

Por último, se muestra como el conocimiento de la distribución del máximo de un proceso de Lévy permite obtener soluciones explícitas para el problema de la parada óptima de los mismos procesos, es decir, la valuación de opciones americanas perpetuas en un mercado de Lévy.

Índice

Capítulo 1

Procesos de Lévy

En este capítulo estudiamos *procesos aleatorios con tiempo continuo*, es decir, familias de variables aleatorias $\{X_t\}$ definidas en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, cuyo índice t, el *tiempo*, toma valores en el conjunto $[0, \infty)$, o en un intervalo $[0, T]$ (con T real, fijo). Una manera alternativa de ver un proceso aleatorio con tiempo continuo, es considerar fijo cada punto ω del espacio de sucesos elementales Ω, obteniéndose una función $X_t(\omega)$ al variar t. Cada una de estas funciones es una *trayectoria* del proceso aleatorio. Decimos que un proceso aleatorio tiene *trayectorias continuas*, cuando estas funciones son continuas para todo ω, con excepción de un conjunto de probabilidad nula.

Decimos que un proceso aleatorio $\{X_t\}$, que verifica $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ (es decir, que parte del origen), tiene *incrementos independientes*, cuando para cualquier elección de índices $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_n < t_n$, las variables aleatorias

$$X_{t_1} - X_{s_1}, X_{t_2} - X_{s_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{s_n}$$

son mutuamente independientes; y que tiene *incrementos estacionarios* (o también *incrementos homogéneos en el tiempo*), cuando para dos tiempos $0 \leq t < t + h$ arbitrarios, la distribución de la variable aleatoria $X_{t+h} - X_t$ no depende de t. Como el proceso parte del origen, la distribución de las variables aleatorias $X_{t+h} - X_t$ y X_h coinciden.

Un resultado clave en la teoria de los procesos de Lévy, es la fórmula de Lévy-Kinchine, que calcula la función característica de las variables X_t como

$$\mathbf{E}\, e^{zX_t} = \exp\big(t\Psi(z)\big),$$

donde la función Ψ se llama *exponente característico*, y está dada por

$$\Psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy) \tag{1.1}$$

con a y $\sigma \geq 0$ constantes reales, y Π una medida positiva en $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\int(1 \wedge y^2)\Pi(dy) < +\infty$, que llamamos *medida de saltos* del proceso, o medida de Lévy-Khinchine. Es importante destacar, que la función Ψ, que siempre esta definida para valores de $z = iy$ imaginarios puros, determina completamente la distribución de probabilidades del proceso. Calculemos el exponente característico en algunos ejemplos:

Ejemplo 1.1 (Proceso de Poisson). Sea $\{N_t\}$ un proceso de Poisson de parámetro α. Veremos que para cada $t > 0$, la variable aleatoria N_t tiene distribución de Poisson de parámetro αt, es decir

$$\mathbf{P}(N_t = n) = e^{-\alpha t}(\alpha t)^n/n! \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, e^{zN_t} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{zn} e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^n}{n!} = e^{-\alpha t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^z\alpha t)^n}{n!}\\ &= \exp\big(t\alpha(e^z - 1)\big),\end{aligned}$$

por lo que el exponente característico de un proceso de Poisson de parámetro α es

$$\Psi(z) = \alpha(e^z - 1) = \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1)\Pi(dy)$$

si ponemos $\Pi(dy) = \alpha\delta_1(dx)$ donde δ_1 es la medida con masa 1 en el punto 1 (delta de Dirac). La medida Π resulta ser la medida de Lévy del proceso. En este caso $a = \sigma = 0$, no hay tendencia, ni parte gaussiana.

Ejemplo 1.2 (Proceso de Poisson compuesto). Consideremos un *proceso de Poisson compuesto* $\{Y_t\}$, definido por

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k \qquad (t \geq 0),$$

donde $N = \{N_t\}$ es un proceso de Poisson de parámetro α, y $Z = \{Z_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuídas, con distribución $F(x)$, y asumimos que N y Z son mutuamente independientes. El proceso Y es un *proceso de Poisson compuesto*, y resulta ser un proceso con incrementos independientes y estacionarios. Calculemos el exponente característico. Aplicando la fórmula de probabilidades totales, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, e^{zY_t} &= \mathbf{E}\, e^{z\sum_{k=1}^{N_t} Z_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\, e^{z\sum_{k=1}^{n} Z_k}\,\mathbf{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mathbf{E}\, e^{zZ_1}\big)^n e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^n}{n!} = \exp\big(t\alpha(\mathbf{E}\, e^{zZ_1} - 1)\big),\end{aligned}$$

de donde el exponente característico es

$$\Psi(z) = \alpha(\mathbf{E}\, e^{zZ_1} - 1) = \alpha\int_{\mathbb{R}}(e^{zy} - 1)F(dy) = \int_{\mathbb{R}}(e^{zy} - 1)\Pi(dy),$$

y resulta que $\Pi(dy) = \alpha F(dy)$ es la medida de Lévy-Khinchine del proceso.

Observemos que en este caso también $a = \sigma = 0$, y que el ejemplo anterior se obtiene de éste, considerando que la distribucón de los saltos es la masa puntual concentrada en 1.

Ejemplo 1.3. Calculemos ahora el exponente característico de un proceso de Wiener $\{W_t\}$. Como W_t tiene distribución normal centrada, con varianza t, tenemos

$$f(z) = \mathbf{E}\, e^{zW_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx - x^2/(2t)}dx.$$

Para calcular la integral anterior, derivamos con respecto de z, y obtenemos

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{zx - x^2/(2t)}dx = \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}d\Big(-e^{-x^2/(2t)}\Big).$$

Luego de integrar por partes, resulta

$$f'(z) = \frac{tz}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx - x^2/(2t)}dx = tzf(z).$$

En consecuencia, $(\ln f(z))' = tz$, $\ln f(t) = tz^2/2 + C$. Como $f(0) = 1$, obtenemos que $C = 0$, y en conclusión

$$f(z) = e^{tz^2/2}. \tag{1.2}$$

De aquí resulta, que el exponente característico es

$$\Psi(z) = \frac{z^2}{2}.$$

Nuestro último ejemplo combina los dos últimos.

Ejemplo 1.4 (Difusión con saltos). Consideremos un proceso aleatorio $\{X_t\}$ definido mediante

$$X_t = at + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k \qquad (t > 0),$$

donde a y $\sigma \geq 0$ son constantes, y, como antes, $W = \{W_t\}$ es un proceso de Wiener, $N = \{N_t\}$ es un proceso de Poisson de parámetro α, y $Z = \{Z_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, y con idéntica distribución $F(x)$. Suponemos además que los procesos W, N, Z son mutuamente independientes. Para calcular el exponente característico, basados en la independencia, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, e^{zX_t} &= e^{azt}\,\mathbf{E}\, e^{z\sigma W_t}\,\mathbf{E}\, e^{z\sum_{k=1}^{N_t} Z_k} \\ &= \exp\Big(t\big(az + \sigma^2 \frac{z^2}{2} + \alpha \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1) F(dy)\big)\Big).\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\Psi(z) = az + \sigma^2 \frac{z^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1)\Pi(dy)$$

donde la medida de saltos viene dada por $\Pi(dy) = \alpha F(dy)$.

Observemos, que si bien en este ejemplo ninguno de los tres parámetros (a, σ, Π) en el exponente característico es nulo, la fórmula obtenida es aún mas sencilla que la general, dada en (1.1). Eso se debe a que la intensidad de los saltos en todos los ejemplos que hemos considerado es finita. El caso más general se obtiene para procesos que presentan una cantidad infinita de saltos en un intervalo de tiempo (por ejemplo, los *procesos estables).*

1.1 Distribución exponencial y Procesos de Poisson

El *proceso de Poisson* es el ejemplo más sencillo de un proceso con incrementos independientes y estacionarios. Consideremos una sucesión $T_1, T_2, \dots$ de variables aleatorias, estrictamente positivas, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Si la variable aleatoria T_k $(k = 1, 2, \dots)$ representa la duración de un cierto evento, en una serie de eventos consecutivos, entonces las variables aleatorias

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n \quad (n = 1, 2, \dots), \qquad S_0 = 0 \tag{1.3}$$

representan el tiempo total transcurrido hasta la finalización del n–ésimo evento. El proceso aleatorio $\{N_t\}$, definido mediante

$$N_t = \max\{n \geq 0 \colon S_n \leq t\} \quad (t \geq 0), \tag{1.4}$$

se denomina *proceso de conteo*, ya que la variable aleatoria N_t cuenta la cantidad de eventos ocurridos hasta el instante t. Observemos, que las trayectorias de un proceso de conteo son no decrecientes, constantes en intervalos, toman únicamente valores naturales, y presentan discontinuidades con saltos de amplitud uno, en cada uno de los instantes $t = S_n$. Siempre suponemos que $N_t \to \infty$ $(t \to \infty)$ *c.s.*

Definición 1.1 (Proceso de Poisson). *El proceso de conteo* $\{N_t\}$ *dado en* (1.4) *es un* proceso de Poisson, *de parámetro* $\alpha > 0$, *cuando* $\{T_n\}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuídas, con distribución exponencial de parámetro* α.

Una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$ tiene densidad $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ $(x \geq 0)$, $p(x) = 0$ $(t < 0)$. Recordemos que su distribucón y su función característica vienen dadas respectivamente por

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \qquad \hat{F}(z) = \mathbf{E}\, e^{zT} = \frac{\alpha}{\alpha - z}.$$

Veamos otra caracterización de su distribución.

Lema 1.1. (a) *Consideremos una función* $G \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, *monótona no creciente, no constante, que verifica* $G(0) = 1$, *tal que existe* t *con* $G(t) > 0$, *y que verifica*

$$G(t + h) = G(t)G(h) \ \textit{para todo}\ t > 0,\ h > 0. \tag{1.5}$$

Entonces, existe $\alpha > 0$, *tal que* $G(t) = e^{-\alpha t}$ $(t \geq 0)$.
(b) *Una variable aleatoria* $T > 0$ *tiene distribución exponencial, si y solo si, para todo* $t > 0$, $h > 0$, *verifica*

$$\mathbf{P}(T > t + h \mid T > t) = \mathbf{P}(T > h). \tag{1.6}$$

La propiedad (1.6) *se denomina* pérdida de memoria.

Demostración. (a) Supongamos que $G(1) > 0$ (si se trata de otro punto, la demostración se adapta sin dificultad). Consideremos un número racional $t = p/q > 0$ (p, q naturales). Aplicando q veces la propiedad (1.5), tenemos $G(1) = G(q/q) = G(1/q)^q$. Entonces, aplicando p veces la misma propiedad, obtenemos

$$G(t) = G(p/q) = G(1/q)^p = G(1)^{p/q} = G(1)^t. \tag{1.7}$$

Sabemos que $0 < G(1) \leq 1$. Si $G(1) = 1$, como la función es monótona (no creciente), obtenemos que es constante; luego $\alpha = -\ln G(1) > 0$, y se verifica $G(t) = e^{-\alpha t}$ para todo $t \geq 0$ racional. La propiedad de monotonía, permite obtener, que $G(t) = e^{-\alpha t}$ para todo real $t \geq 0$, concluyendo la demostración de (a).

Veamos (b). Si una variable aleatoria T tiene distribución exponencial, la fórmula (1.6) es inmediata. Por otra parte, si una variable aleatoria verfica (1.6), la función $G(t) = \mathbf{P}(T > t)$ verifica (1.5), y las demás hipótesis de la parte (a), concluyendo, que existe $\alpha > 0$ tal que $G(t) = e^{-\alpha t}$ $(t \geq 0)$. Esto equivale a decir que T tiene distribución exponencial. □

Enunciamos ahora resultados relativos al proceso de Poisson, que permiten, a partir de la definición que vimos, obtener la propiedad de independencia y estacionariedad de los incrementos, así como la distribución de las coordenadas del proceso. Las demostraciones pueden verse en [20].

Proposición 1.1. *Las variables aleatorias $T_1, \dots, T_n$ son independientes, idénticamente distribuídas, con distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$, si y solo si, el vector aleatorio $(S_1, \dots, S_n)$ definido en (1.3), tiene densidad, dada por*

$$p(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \alpha^n e^{-\alpha s_n}, & \text{si } 0 < s_1 < \cdots < s_n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.8}$$

Corolario 1.1. *Consideremos un proceso de Poisson $\{N_t\}$ de parámetro $\alpha > 0$.*
(a) *Para cada $n = 1, 2, \dots,$ la variable aleatoria $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ tiene densidad dada por*

$$q(x) = \alpha^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}, \quad (x > 0), \tag{1.9}$$

$q(x) = 0$ $(x \leq 0)$, y función de distribución dada por

$$F(x) = e^{-\alpha x}\Big(1 - \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}\Big), \tag{1.10}$$

denominada distribución de Erlang *de parámetros* (α, n).
(b) *Para cada* $t > 0$, *la variable aleatoria* N_t *tiene distribución de Poisson de parámetro* αt, *es decir*

$$\mathbf{P}(N_t = n) = e^{-\alpha t}(\alpha t)^n / n! \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Teorema 1.1. *Un proceso de conteo* $\{N_t\}$ *es un proceso de Poisson de parámetro* $\alpha > 0$, *si y solo si, se verifican las propiedades*
(a) *Dados tiempos* $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, *y naturales* $n_1, \dots, n_k$, *todos arbitrarios, se verifica*

$$\mathbf{P}(N_{t_1} = n_1, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j).$$

(b) *Dados tiempos* $0 \leq t < t + h$ *arbitrarios, se verifica*

$$\mathbf{P}(N_{t+h} - N_t = n) = e^{-\alpha h}(\alpha h)^n / n! \quad (n = 0, 1, \dots).$$

1.2 Probabilidad de ruina en el procesos de Poisson compuesto

Consideremos una sucesión $T_1, Z_1, T_2, Z_2, \dots$ de variables aleatorias independientes. Supongamos que las variables aleatorias $\{T_n\}$ son idénticamente distribuídas, con distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$, y sea $\{N_t\}$ el proceso de Poisson definido en (1.4). Por su parte, las variables aleatorias $\{Z_n\}$ son también idénticamente distribuídas. Consideremos, para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k,$$

donde entendemos $Y_t = 0$ si $N_t = 0$, que es la suma de una cantidad aleatoria de sumandos. El proceso aleatorio $\{Y_t\}$ se llama *proceso de Poisson compuesto*. Sus trayectorias son constantes en los intervalos en los que $\{N_t\}$ es constante, y si S_n denota el n–ésimo salto de proceso de Poisson, la magnitud del salto de $\{Y_t\}$ en el instante $t = S_n$ es Z_n.

En matemática actuarial se considera el siguiente modelo para para la evolución del capital de una compañía de seguros. Definimos, para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria

$$X_t = x + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k. \tag{1.11}$$

El proceso aleatorio $\{X_t\}$, que modela el capital de la compañía, se denomina *proceso de riesgo*. El capital inicial $X_0 = x$ es un real positivo, la constante $c > 0$ es la *tasa de pago* de los seguros, es decir, suponemos que la compañía recibe un monto ch en cada intervalo de tiempo $[t, t+h]$. En cada uno de los instantes S_n $(n = 1, 2, \dots)$ esta compañía debe pagar un reclamo de un monto Z_n (que suponemos positivo). Es importante entonces, conocer la magnitud

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t \leq 0),$$

la probabilidad de que la compañía tenga un capital "negativo", que llamamos *probabilidad de ruina*.

En general, no es posible calcular explícitamente esta magnitud. Sin embargo, en el caso particular en el que los reclamos $\{Z_n\}$ tienen distribución exponencial, la probabilidad de ruina se calcula en forma exacta, como vemos a continuación.

Teorema 1.2. *Sea $\{X_t\}$ el proceso de riesgo definido en la ecuación* (1.11), *con reclamos $\{Z_n\}$ con distribución exponencial, de parámetro $\beta > 0$, que verifica $\alpha < c\beta$. Entonces, la probabilidad de ruina, está dada por*

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t \leq 0) = \frac{\alpha}{c\beta} e^{-(\beta - \alpha/c)x}, \qquad x > 0. \tag{1.12}$$

Demostración. Como las trayectorias del proceso $\{X_t\}$ son crecientes en los intervalos entre los instantes de salto, el primer t tal que $X_t \leq 0$ es un instante $t = S_n$, es decir, un instante un salto de la trayectoria. Tenemos entonces

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t \leq 0) = \mathbf{P}(\exists n \geq 1\colon X_{S_n} \leq 0). \tag{1.13}$$

El valor del proceso en estos instantes, es

$$X_{S_n} = x + cS_n - \sum_{k=1}^{n} Z_k = x + \sum_{k=1}^{n} (cT_k - Z_k) = x + U_n, \tag{1.14}$$

donde introdujimos la notación $U_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$ $(n = 1, 2, \dots)$, y designamos $V_k = cT_k - Z_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. La sucesión $\{U_n\}$ se denomina *paseo al azar asociado* al proceso de riesgo $\{X_t\}$, y en vista de (1.13) y (1.14), tenemos

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t \leq 0) = \mathbf{P}(\exists n \geq 1\colon x + U_n \leq 0).$$

Esto significa que calcular la probabilidad de ruina es equivalente a resolver un problema de barrera para el paseo al azar asociado. Aplicando la ley fuerte de los grandes números, obtenemos, que $U_n/n \to \mathbf{E}\, V_1 = c/\alpha - 1/\beta > 0$ $(n \to \infty)$ *c.s.* Por eso, $U_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *c.s.*, y el problema de calcular la probabilidad en ruina consiste en cuantificar la proporción de trayectorias del paseo al azar que alcanzan el nivel $y = 0$, antes de tomar valores grandes.

No es difícil ver que las variables aleatorias cT_k $(k = 1, 2, \dots)$ tienen distribución exponencial de parámetro $\gamma = \alpha/c$. Además, que las variables aleatorias V_k $(k = 1, 2, \dots)$ tienen densidad, dada por

$$p(y) = \begin{cases} \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} e^{-\gamma y} & \text{si } y > 0, \\ \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} e^{\beta y} & \text{si } y \le 0. \end{cases}$$

Consideremos ahora la función auxiliar

$$R(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c\beta} e^{-(\beta - \alpha/c)x}, & \text{si } x \ge 0, \\ 1, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

y veamos, que para $x > 0$, verifica la siguiente ecuación[1]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R(x+y)p(y)dy = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \int_{-\infty}^{-x} e^{\beta y} dy + \frac{\gamma^2}{\beta+\gamma} \int_{-x}^{0} e^{-(\beta-\gamma)(x+y)} e^{\beta y} dy \\ + \frac{\gamma^2}{\beta+\gamma} \int_{0}^{\infty} e^{-(\beta-\gamma)(x+y)} e^{-\gamma y} dy = \frac{\gamma}{\beta} e^{-(\beta-\gamma)x} = R(x). \end{aligned} \tag{1.16}$$

(Esta igualdad es equivalente a $\mathbf{E}\, R(x + V_1) = R(x)$, con $x > 0$.)

Consideremos el tiempo de parada

$$\tau = \inf\{n \ge 0 \colon x + U_n \le 0\},$$

y veamos que la sucesión $\{R(x + U_{\tau\wedge n})\}$ es una martingala. En efecto,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(R(x + U_{\tau\wedge(n+1)}) \mid F_n\right) \\ &\quad = \mathbf{E}\left(R(x + U_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le n\}} \mid F_n\right) + \mathbf{E}\left(R(x + U_n + V_{n+1})\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \mid F_n\right) \\ &\qquad = R(x + U_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le n\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \int_{-\infty}^{\infty} R(x + U_n + y)p(y)dy \\ &\qquad\quad = R(x + U_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le n\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>n\}} R(x + U_n) = R(x + U_{\tau\wedge n}). \end{aligned}$$

Aquí nos hemos basado en los siguientes hechos: (a) las variables aleatorias $R(x + U_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau\le n\}}$ y $\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}$ son funciones del vector aleatorio $(V_1, \dots, V_n)$;

[1] La ecuación integral (1.16) se llama *ecuación de Wiener–Hopf*.

(b) calculamos la tercer esperanza condicional como suma de variables independientes; (c) en el suceso $\{\tau > n\}$, vale $x + U_n > 0$, y podemos aplicar aplicar la identidad (1.16), para obtener la última igualdad. Estamos en condiciones de aplicar el teorema del muestreo opcional, con el tiempo de parada $\tau \wedge n$. Observando que $R(x + U_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} = \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}}$, tenemos

$$R(x) = \mathbf{E}\, R(x + U_{\tau \wedge n}) = \mathbf{P}(\tau \leq n) + \mathbf{E}\, R(x + U_n)\mathbf{1}_{\{\tau > n\}}. \tag{1.17}$$

Como $U_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *c.s.*, y $R(x) \to 0$ $(x \to \infty)$, se verifica $R(x+U_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, *c.s.*, y obtenemos $\mathbf{E}\, R(x + U_n)\mathbf{1}_{\{\tau > n\}} \to 0$ $(n \to \infty)$, porque la función $R(x)$ es acotada. Entonces, al tomar límite, si $n \to \infty$, en la fórmula (1.17), para $x > 0$, obtenemos

$$R(x) = \mathbf{P}(\tau < \infty) = \mathbf{P}(\exists n \geq 1\colon x + U_n \leq 0),$$

y en vista de la definición de $R(x)$ en (1.15), concluimos la demostración. $\square$

1.3 Problemas de barrera para el proceso de Wiener

En esta sección estudiamos el *proceso de Wiener*, también denominado *movimiento Browniano*. Este proceso aleatorio es el ejemplo básico de diversas familias de procesos aleatorios (entre ellas: procesos de Markov y martingalas con tiempo continuo, procesos de Lévy), juega un importante rol en estadística matemática, así también como en la modelización matemática, en diversas ramas del conocimiento (por ejemplo: física, biología, finanzas).

Su denominación se debe a las investigaciones del botánico inglés Robert Brown, que en 1828 observó y describió el movimiento caótico de una partícula de polen suspendida en agua, destacando la naturaleza física (y no biológica) del movimiento observado. Luego de las contribuciones de L. Bachelier (1900), quién propuso este modelo para las fluctuaciones de la bolsa de París; y de A. Einstein (1905) y M. Smoluchowski (1906), que lo propusieron en el marco de la teoría molecular de la materia; Norbert Wiener, en 1923, construyó el proceso aleatorio con trayectorias continuas, correspondiente a la dinámica observada, y a la definición que presentamos a continuación.

Definición 1.2. *Un proceso aleatorio* $\{W_t\}$ *es un* proceso de Wiener*, si se verifican las siguientes propiedades:*

(a) *El proceso parte del origen, es decir,* $\mathbf{P}(W_0 = 0) = 1$.

(b) *Las trayectorias de* $\{W_t\}$ *son funciones continuas.*

(c) *El proceso aleatorio* $\{W_t\}$ *tiene incrementos independientes.*

(d) *Dados* $0 \leq t < t+h$, *la variable aleatoria* $W_{t+h} - W_t$ *tiene distribución normal, con esperanza nula, y varianza* $\mathbf{var}(W_{t+h} - W_t) = h$.

En esta sección, consideremos un *proceso de Wiener con tendencia*, que designamos $\{X_t\}$, y definimos mediante

$$X_t = W_t + at \quad (t \geq 0), \tag{1.18}$$

donde $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, y a es un real arbitrario.

Es sencillo de ver, que el proceso aleatorio $\{X_t\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios, y cumple la siguiente *propiedad de Markov*: Dados $0 < t_1 < \cdots < t_n = t < t+h$, y una función $h(x)$, tal que existe $\mathbf{E}\, h(X_{t+h})$, se verifica

$$E\big(h(X_{t+h}) \mid X_t, \dots, X_{t_1}\big) = E\big(h(X_{t+h}) \mid X_t\big) = g(X_t), \tag{1.19}$$

donde $g(x) = \mathbf{E}\, h(x + X_{t+h} - X_t)$. La segunda igualdad se obtiene dado que las variables aleatorias X_t y $X_{t+h} - X_t$ son independientes; por su parte, la primer igualdad se obtiene basándose en la independencia del vector aleatorio $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ y la variable aleatoria $X_{t+h} - X_t$.

Dado $x_0 > 0$ decimos que la trayectoria $X_t(\omega)$ alcanza la barrera de nivel x_0 en el intervalo $[0, T]$, si existe $t \in [0, T]$ tal que $X_t(\omega) > x_0$, hecho que equivale a que se verifique $\max_{0 \leq t \leq T} X_t(\omega) > x_0$. Denominamos entonces *problema de barrera con tiempo finito*, al cálculo de la probabilidad

$$\mathbf{P}\Big(\max_{0 \leq t \leq T} X_t(\omega) > x_0\Big) = \mathbf{P}(\exists t \in [0, T] \colon X_t > x_0),$$

es decir, al cálculo de la probabilidad de que el proceso $\{X_t\}$ alcance la barrera de nivel x_0 en el intervalo $[0, T]$. Análogamente se define el *problema de barrera con tiempo infinito*, consistente en el cálculo de la probabilidad

$$\mathbf{P}\Big(\max_{t \geq 0} X_t(\omega) > x_0\Big) = \mathbf{P}(\exists t \geq 0 \colon X_t > x_0).$$

Teorema 1.3 (Problema de barrera con tiempo finito).
Consideremos el proceso aleatorio $\{X_t\}$ *definido en* (1.18). *Entonces*

$$\mathbf{P}\Big(\max_{0 \leq t \leq T} X_t > x_0\Big) = \Phi\Big(\frac{-x_0 + aT}{\sqrt{T}}\Big) + e^{2ax_0}\Phi\Big(\frac{-x_0 - aT}{\sqrt{T}}\Big) \tag{1.20}$$

donde $\Phi(x)$ *es la distribución normal estándar.*

La demostración de este teorema se basa en el teorema del muestreo opcional de Doob, mediante el siguiente resultado.

Lema 1.2. *Consideremos el proceso aleatorio* $\{X_t\}$ *definido en* (1.18)*, y las funciónes de dos variables*

$$\begin{aligned} A_1(x,t) &= e^{2a(x_0-x)}\Phi\Big(\frac{x-x_0-a(T-t)}{\sqrt{T-t}}\Big) \\ A_2(x,t) &= \Phi\Big(\frac{x-x_0+a(T-t)}{\sqrt{T-t}}\Big) \end{aligned}$$

definidas para x *real y* t *en el intervalo* $[0,T)$*. Entonces, dados* $0 \leq s < t < T$*, se verifica*

$$\mathbf{E}\big(A_k(X_t,t) \mid X_s\big) = A_k(X_s,s) \quad (k=1,2).$$

Demostración. Como las variables aleatorias $Y = X_t - X_s$ y X_s son independientes, se verifica

$$\mathbf{E}\big(A_k(X_t,t) \mid X_s\big) = g_k(X_s) \quad (k=1,2),$$

donde $g_k(x) = \mathbf{E}\,A_k(x+Y,t)$. El lema estará demostrado, si verificamos que $g_k(x) = A_k(x,s)$ $(k=1,2)$. Designemos $h = t-s$, y $\varphi(x)$ la densidad normal estándar. La variable aleatoria Y tiene distribución normal estándar, con parámetros $(ah,\sqrt{h})$. Entonces,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2a(x_0-x-y)}\Phi\Big(\frac{x+y-x_0-a(T-t)}{\sqrt{T-t}}\Big)\frac{1}{\sqrt{h}}\varphi\Big(\frac{y-ah}{\sqrt{h}}\Big)dy \\ &= e^{2a(x_0-x)}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\Big(\frac{x+y-x_0-a(T-t)}{\sqrt{T-t}}\Big)\frac{1}{\sqrt{h}}\varphi\Big(\frac{-y-ah}{\sqrt{h}}\Big)dy\Big]dv \\ &= e^{2a(x_0-x)}\Phi\Big(\frac{x-x_0-a(T-s)}{\sqrt{T-s}}\Big) = A_1(x,s), \end{aligned}$$

donde utilizamos que $e^{-2ay}\varphi\big((y-ah)/\sqrt{h}\big) = \varphi\big((-y-ah)/\sqrt{h}\big)$, y calculamos la integral entre paréntesis rectos, de acuerdo a la fórmula para la convolución de dos distribuciones, en el caso en que estas son normales. Esto concluye la demostración para el caso $k=1$. El caso $k=2$ es análogo (y más sencillo). $\square$

Demostración del teorema. Para demostrar el teorema, consideremos la función

$$P(x,t) = \begin{cases} A_1(x,t) + A_2(x,t), & x \text{ real y } t \in [0,T), \\ 0, & x < x_0 \text{ y } t = T, \\ e^{2a(x_0-x)} + 1, & x \geq x_0 \text{ y } t = T \end{cases}$$

que verifica

$$P(0,0)=\Phi\Big(\frac{-x_0+aT}{\sqrt{T}}\Big)+e^{2ax_0}\Phi\Big(\frac{-x_0-aT}{\sqrt{T}}\Big),$$

que es el término a la izquierda en el enunciado del teorema. Definamos el tiempo de parada

$$\tau=\inf\{t\colon X_t>x_0, t\in[0,T]\}\wedge T.$$

Como la función $P(x,t)$ es continua, con excepción del punto (x_0,T), teniendo en cuenta la propiedad de martingala, obtenemos que el proceso aleatorio $\{P(X_t,t)\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala. Además

$$P\big(X_\tau,\tau\big)=\mathbf{1}_{\{\tau<T\}}\quad a.s.$$

Apliquemos el teorema del muestreo opcional de Doob, para obtener

$$P(0,0)=\mathbf{E}\,P\big(X_\tau,\tau\big)=\mathbf{E}\,\mathbf{1}_{\{\tau<T\}}=\mathbf{P}\,\Big(\max_{0\leq t\leq T}X_t>x_0\Big),$$

concluyendo la demostración. □

Es de particular interés el caso $a=0$. La fórmula (1.20) en este caso es

$$\mathbf{P}\,\Big(\max_{0\leq t\leq T}W_t>x_0\Big)=2\Phi\Big(\frac{-x_0}{\sqrt{T}}\Big)=2\,\mathbf{P}(W_T\geq x_0). \tag{1.21}$$

Una demostración alternativa de la fórmula (1.21) se obtiene mediante el principio de reflexión[2] a partir del cual resulta, que el proceso $\{V_t\}$, definido mediante

$$V_t(\omega)=\begin{cases}W_t(\omega), & \text{si } s\leq\tau(\omega),\\ 2x_0-W_t(\omega) & \text{en caso contrario,}\end{cases}$$

es un proceso de Wiener (en el intervalo $[0,T]$), donde τ es el instante de la primer llegada al nivel x_0. Bajo este supuesto

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,\Big(\max_{0\leq t\leq T}W_t>x_0\Big)&=\mathbf{P}\,\Big(\max_{0\leq t\leq T}W_t>x_0,W_T\geq x\Big)\\&\quad+\mathbf{P}\,\Big(\max_{0\leq t\leq T}W_t>x_0,W_T<x\Big)\\&=\mathbf{P}(W_T\geq x_0)+\mathbf{P}\,\Big(\max_{0\leq t\leq T}V_t>x_0,V_T\geq x\Big)\\&=\mathbf{P}(W_T\geq x_0)+\mathbf{P}(V_T\geq x_0)=2\,\mathbf{P}(W_T\geq x_0).\end{aligned}$$

[2]No veremos aquí la demostración de este principio, que se basa en la denominada *propiedad fuerte de Markov*,

Una segunda consecuencia de (1.20) es la resolución del problema de barrera con tiempo infinito. La sucesión de sucesos $\{\omega\colon X_t > x_0 \text{ para algún } t \leq N\}$ $(N = 1, 2, \dots)$ es creciente con N, y tiene como límite, si $N \to \infty$, el suceso $\{\omega\colon \exists t \geq 0\colon X_t > x_0\}$. Tenemos entonces

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t > x_0) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\exists t \leq N\colon X_t > x_0).$$

Para el cálculo del límite, consideremos primero el caso $a \geq 0$. Si $T \to \infty$ en (1.20), se obtiene

$$\mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t > x_0) = 1.$$

Esto quiere decir que si $a \geq 0$ el proceso $\{X_t\}$ alcanza cualquier barrera con probabilidad uno. El caso $a < 0$ es diferente, y del cálculo del límite si $T \to \infty$ en (1.20), obtenemos

$$\mathbf{P}\left(\max_{t\geq 0} X_t(\omega) > x_0\right) = \mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t > x_0) = e^{2ax_0}, \tag{1.22}$$

es decir, la variable aleatoria $\max_{t\geq 0}(W_t + at)$ tiene distribución exponencial con parámetro $-2a$.

Consideremos ahora el *problema de dos barreras con tiempo infinito* para el proceso $\{X_t\}$ definido en (1.18), donde $a \neq 0$. Dadas las constantes $y_0 < 0 < x_0$, consideramos las variables aleatorias

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0\colon X_t > x_0\}, \qquad \tau_2 = \inf\{t \geq 0\colon X_t < y_0\}. \tag{1.23}$$

El problema de dos barreras consiste en determinar la probabilidad $\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_2)$, es decir, la probabilidad de alcanzar la barrera positiva antes que la negativa.

Según hemos visto, si $a \geq 0$, se tiene $\mathbf{P}(\tau_1 < \infty) = 1$, mientras que si $a < 0$, un razonamiento análogo[3] conduce a obtener que $\mathbf{P}(\tau_2 < \infty) = 1$. En conclusión, alguna de las dos barreras se alcanza, por lo que se verifica la ecuación

$$\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_2) + \mathbf{P}(\tau_1 > \tau_2) = 1. \tag{1.24}$$

Por otra parte, la variable aleatoria $Y = X_{t+h} - X_t$ tiene distribución normal con parámetros $(ah, \sqrt{h})$, y la funcion auxiliar de una variable $P(x) = e^{-2ax}$, verifica la propiedad

$$\mathbf{E}\left(P(X_{t+h}) - P(X_t) \mid X_t\right) = P(X_t)\,\mathbf{E}\left(e^{-2aY} - 1\right) = 0.$$

[3]Esta segunda afirmación puede también obtenerse de la primera observando que el proceso $\{-W_t\}$ es un proceso de Wiener.

Es posible verificar, que el argumento de la demostración del teorema 1.3, se puede aplicar. En este caso, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 = P(0) = \mathbf{E}\, P(X_\tau) &= \mathbf{E}\, e^{-2ax_0} \mathbf{1}_{\{\tau_1<\tau_2<T\}} \\ &+ \mathbf{E}\, e^{-2ay_0} \mathbf{1}_{\{T>\tau_1>\tau_2\}} + \mathbf{E}\, P(X_T) \mathbf{1}_{\{T\leq\tau_1\wedge\tau_2\}}. \end{aligned}$$

Como $P(X_T)\mathbf{1}_{\{T\leq\tau_1\wedge\tau_2\}} \to 0$ $(T\to\infty)$ $c.s.$ (ya que alguna de las dos barreras se alcanza), y se trata de una variable aleatoria acotada, el último término en la fórmula anterior se anula, si $T\to\infty$. Al tomar límite si $T\to\infty$, tenemos

$$1 = e^{-2ax_0}\, \mathbf{P}(\tau_1<\tau_2) + e^{-2ay_0}\, \mathbf{P}(\tau_1>\tau_2). \tag{1.25}$$

De la resolución del sistema lineal formado por (1.24) y (1.25) se obtiene

$$\mathbf{P}(\tau_1<\tau_2) = \frac{1-e^{-2ay_0}}{e^{-2ax_0}-e^{-2ay_0}}. \tag{1.26}$$

que es el resultado buscado. Como consecuencia de este resultado, podemos obtener, también, la fórmula (1.22). En efecto, como el suceso $\{\tau_1<\tau_2\}$ es creciente con $y_0\to-\infty$, se obtiene la identidad (1.22), tomando límite en (1.26), cuando $y_0\to-\infty$.

Capítulo 2

Problema de la ruina para procesos de Lévy con saltos negativos con distribución de tipo fase y positivos arbitrarios.

2.1 Distribuciones tipo Fase

La búsqueda de solucione exactas a los problemas de barrera, o cálculos de probablidades de ruina para procesos de Poisson compuestos, como los estudiados en la sección 1.2, plantea la siguiente pregunta:

- ¿cuál es la propiedad esencial de la distribución de los saltos que permite obtener una solución exacta?,

y, respondida esta pregunta, se plantea el problema:

- determinar la clase más amplia posible de distribuciones de probabilidad que posean esta propiedad, y resolver el problema del cálculo de probabilidades de ruina para esta familia de distribuciones.

Una primera respuesta a esta pregunta consiste en observar la función característica de la distribución exponencial: si Z tiene distribución exponencial con parámetro α, entonces

$$\mathbf{E}\, e^{zZ} = \frac{\alpha}{\alpha - z}.$$

La propiedad de ser una función racional en los complejos permite aplicar la estrategia descrita antes, y generalizar el cálculo de probabilidades de ruina a la clase de variables aleatorias cuya función característica es una función racional. Este método puede verse en Kemperman (1961).

Una segunda resupuesta a esta pregunta esta dada por la forma de la densidad de una variable aleatoria exponencial Z: si $x > 0$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}.$$

La generalización se obtiene considerando que el parámetro α es una matriz, para obtener una distribución de la forma

$$B(x) = 1 - \pi e^{\mathbf{T}x}\mathbf{1}, \tag{2.1}$$

donde π es un vector d-dimensional, $\mathbf{T}$ una matriz $d \times d$, y $\mathbf{1}$ es el vector que contiene d unos. Este enfoque, denominado *método matricial analítico* fue propuesto por Neuts (1981), posee la ventaja frente al anterior de no recurrir al análsis complejo, y ser más versatil para el cálculo numérico.

Una nueva respuesta a esta pregunta, del punto de vista formal coincidente con la anterior, surge de dar una interpretación probabilística a la fórmula (2.1): consideremos que Z es el tiempo de vida de una cadena de Markov con tiempo continuo, cantidad finita de estados, y un único estado absorbente Δ, que absorbe con probabilidad uno a la cadena. Este enfoque es desarrollado por Asmussen en [2]. (Ver también [1], de donde tomamos la notación.)

Podemos interpretar que esta respuesta se basa en la propiedad de *pérdida de memoria*. Si sabemos que la variable aleatoria Z superó un umbral, sus distribuciones condicional e incondicional coinciden. Eso implica que la *profundidad de la ruina*, o el "sobresalto" (overshot) si observamos la distribución del máximo tiene una distribución conocida. La idea es entonces generalizar en el siguiente sentido: consideremos la clase de variables aleatorias, tales que, condicionando a determinado sucesos, posee la propiedad de pérdida de memoria. Esto motiva la introducción de las *distribuciones tipo fase*.

Veamos los parámetros que determinan una distribución tipo fase:

- La cantidad de estados no absorbentes d.
- La distribución inicial de la cadena $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_d)$. Suponemos que $\|\pi\| = \sum_{i=1}^{d} \pi_i \leq 1$, asignando probabilidad $1 - \|\pi\|$ a la distribución inicial en el estado absorbente Δ, que, cuando nos convenga, consideraremos $\Delta = -\infty$.

- La matriz $\mathbf{T}$, que es el parámetro en el exponente de la distribución (2.1) es la *matriz de intensidades* restringida a los d estados no absorbentes:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{d1} & \cdots & t_{dd} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

  donde el vector $\mathbf{t}$ es el vector de tasas de salida (exit rates vector), se define mediante $t_j + \sum_{k=1}^{d} t_{jk} = 0$ $(j = 1, \dots, d)$.

Observemos que la matriz de intensidades de toda la cadena de Markov, con dimension $(d+1) \times (d+1)$ se puede dar en bloques:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{0}$ es un vector fila de d ceros.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1 (Distribución exponencial). Tomemos una cadena con dos estados, uno de ellos absorbente, es decir $d = 1$, y tasa de transición del estado no absorbente al absorbente $-\alpha$, es decir $\mathbf{T} = [-\alpha]$. Si la distribución inicial de la cadena se concentra en el estado no absorbente, es decir, $\pi = (1)$, escribiendo la fórmula (2.1) obtenemos una distribución exponencial $B(t) = 1 - e^{-\alpha t}$. Es interesante observar, que si la distribución incial es (π) con $\pi < 1$ obtenemos una distribución $B(x) = 1 - \pi e^{-\alpha x}$, y densidad $\pi \alpha e^{-\alpha x}$, que corresponde a una distribución exponencial degenerada, con probabilidad $1 - \pi$ de valer 0. Este ejemplo muestra que las distribuciones tipo fase generalizan las distribuciones exponenciales.

Ejemplo 2.2 (Mezclas de exponenciales). Las mezclas de exponenciales, o distribuciones hiper-exponenciales se obtienen sorteando con probabilidad a_i un tiempo de vida exponencial de parámetro α_i, con $i = 1, \dots, d$. Los parámetros de la representación tipo fase son: $d > 1$ estados no absorbentes, un vector de distribuciones iniciales $\pi = (a_1, \dots, a_d)$ (donde incluímos el caso $\|\pi\| < 1$), y matriz de tasas de transición diagonal, con su correspondiente vector de tasas de salida, dados por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha_d \end{bmatrix}, \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix},$$

La densidad de una mezcla de exponenciales viene dada por

$$b(x) = \sum_{k=1}^{d} a_k \alpha_k e^{-\alpha_k x}, \qquad x > 0.$$

Su función característica es

$$\hat{B}(z) = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{\alpha_k}{\alpha_k - z},$$

es decir, corresponde a una función racional con d raíces reales y simples.

Ejemplo 2.3 (Distribución Erlang). La distribución de Erlang con parámetros d y α se puede obtener mediante la suma de d variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene distribución exponencial de parámetro α. Para obtener los parámetros de la distribución tipo fase, consideramos d estados no absorbentes, una distribución inicial concentrada en el primero de ellos, es decir, $\pi = (1, 0, \ldots, 0)$, y una matriz de tasas de transición, con su correspondiente vector de tasas de salida, dados por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix},$$

Es decir, la "partícula" sale del primer estado, pasa al segundo en un tiempo exponencial de parámetro α, del segundo al tercero en otro tiempo exponencial de parámetro α (independiente) y así sucesivamente hasta llegar al d-ésimo estado. De este, luego de un tiempo exponencial de parámetro α cae en el estado absorbente. La densidad correspondiente viene dada por

$$b(x) = \alpha^d \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} e^{-\alpha x}, \qquad x > 0.$$

Su función característica es

$$\hat{B}(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^d,$$

es decir, corresponde a una función racional con una raíz real de multiplicidad d.

2.2 Propiedades de las distribuciones tipo fase

Enunciamos primero el teorema que demuestra la conexión entre el método matricial analítico y las distribuciones tipo fase (Teorema VIII.1.5 en Asmussen [2]).

Teorema 2.1. *Sea B una distribución de tipo fase con parámetros $(\pi, \mathbf{T}, d)$. Entonces:*

(a) *la función de distribución vale $B(x) = 1 - \pi e^{\mathbf{T}x}\mathbf{1}$;*

(b) *la densidad vale $b(x) = \pi e^{\mathbf{T}x}\mathbf{t}$;*

(c) *la función característica vale $\hat{B}(z) = \int_0^\infty e^{zx} B(dx) = \pi(-z\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t}$;*

(d) *el momento n-ésimo vale $\int_0^\infty x^n B(dx) = (-1)^n n! \pi \mathbf{T}^{-n}\mathbf{1}$.*

Sobre la demostración, digamos que la clave es obtener la propiedad (a). Esto se hace resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes que resulta de las ecuación backward de Kolmogorov-Chapman para cadenas de Markov en tiempo continuo. El resto de las propiedades se obtiene directamente, efectuando los cálculos necesarios.

Una característica notable de las distribuciónes tipo fase, es que, gracias a la definición probabilística, es sencillo demostrar que una gran cantidad de operaciones entre variables aleatorias de tipo fase da como resultado una variable aleatoria de tipo fase. Esto se demuestra construyendo la cadena de Markov para el resultado de la operación, a partir de las cadenas de Markov de los operandos.

Teorema 2.2. (a) *La suma de dos variables aleatorias de tipo fase, con parámetros $(\pi^i, \mathbf{T}^i, d^i)$ $(i = 1, 2)$, tiene distribución tipo fase, con parámetros $(\pi, \mathbf{T}, d^1 + d^2)$, donde*

$$\pi_n = \begin{cases} \pi^1_n & si\ n \leq d^1 \\ \pi^2_{n-d^1} & si\ n > d_1 \end{cases} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^1 & \mathbf{t}^1\pi^2 \\ 0 & \mathbf{T}^2 \end{bmatrix}$$

(b) *La mezcla de un número finito de distribuciones de tipo fase es de tipo fase.*
(c) *Consideremos una distribución tipo fase B con parámetros $(\pi, \mathbf{T}, d)$, y la distribución $C = \sum_{n=1}^\infty (1-\rho)\rho^{n-1} B^{*n}$. En forma equivalente, si $U = \{U_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución*

B, tomando una variable aleatoria N independiente de U con distribución geométrica y parámetro ρ, es decir $\mathbf{P}(N = n) = (1-\rho)\rho^{n-1}$, la suma

$$U_1 + \cdots + U_N,$$

de una cantidad aleatoria de sumandos, tiene distribución C. Decimos que C es una composición geométrica. *La distribución de C es también de tipo fase, con parámetros $(\pi, \mathbf{T}+\rho\mathbf{t}\pi, d)$, como puede verse modificando la cadena de Markov asociada a B de la siguiente forma: en el momento de transición al estado absorbente Δ, sorteamos con probabilidad ρ volver a los estados no absorbentes (y elejimos a cual ir con la misma distribución inicial π), y con probabilidad $1-\rho$ vamos efectivamente a Δ. Dos variantes de este argumento son importantes:*

(c1) *Si la primer variable aleatoria U_1 tiene una distribución incial diferente, digamos μ, entonces la composición geométrica resulta de tipo fase con parámetros $(\mu, \mathbf{T}+\rho\mathbf{t}\pi, d)$.*

(c2) *Si la distribución B es defectiva, es decir, si $\|\pi\| < 1$, y la variable N no es independiente de U, sino que $N+1$ es el primer n tal que $U_n = \infty$, entonces $U_1 + \cdots + U_N$ es de tipo fase, con parámetros $(\pi, \mathbf{T}+\mathbf{t}\pi, d)$.*

2.3 Probabilidad de ruina en el procesos de Poisson compuesto: segunda parte

Veamos una demostración alternativa del teorema 1.2, para calcular la probabilidad de ruina, basada en las propiedades de las distribuciones tipo fase. Esto nos permitirá generalizar el resultado en las siguientes dos direcciones:

- Asumimos que la distribución de los reclamos es de tipo fase, incluyendo a la distribución exponencial.
- Asumimos que los tiempos entre reclamos, que determinan el proceso de conteo tiene una distribución arbitraria $A(x)$.

Sea entonces $N = \{N_t\}$ un proceso de conteo con distribución interarrivos $A(x)$, $Z = \{Z_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, de tipo fase con parámetros $(\pi, \mathbf{T}, d)$, y c una constante positiva. Queremos determinar, para cada $x > 0$, la probabilidad de ruina, dada por:

$$\mathbf{P}\Big(\exists t \geq 0\colon x + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k \leq 0\Big) = \mathbf{P}\Big(\exists t \geq 0\colon x \leq \sum_{k=1}^{N_t} Z_k - ct\Big)$$
$$= \mathbf{P}\Big(\max_{t\geq 0}\Big(\sum_{k=1}^{N_t} Z_k - ct\Big) \geq x\Big).$$

Es decir, si introducimos $S = \{S_t\}$ mediante $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k - ct$, queremos determinar la distribución del máximo del proceso S. Para esto seguimos la presentación de Asmussen (2000, capítulo VIII).

Definimos los *momentos de ascenso* (ladder times) del proceso como

$$A_1 = \inf\{t \geq 0\colon X_t > 0\}, \quad A_2 = \inf\{t > A_1\colon X_t > X_{T_1}\}, \quad \dots$$

considerando $T_n = \infty$ si el conjunto es vacío. Definimos ahora los *escalones de ascenso* (ladder heights), como

$$G_1 = X_{A_1}, \quad G_2 = X_{A_2} - X_{A_1}, \quad \cdots$$

con la convención $X_\infty = -\infty$, dado que suponemos que $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ *c.s.*

La propiedad de incrementos independientes y estacionarios del paseo al azar asociado (que se construye como en la demostración anterior) permiten demostrar, que las variables aleatorias $\{G_n\}$ son independientes e idénticamente distribuídas. Además, considerando la variable aleatoria $N = \inf\{n\colon G_n = -\infty\} - 1$, obtenemos que el máximo del proceso verifica

$$M = \max_{t\geq 0} S_t = \max_{t\geq 0}\Big(\sum_{k=1}^{N_t} Z_k - ct\Big) = G_1 + \cdots + G_N. \tag{2.3}$$

Basados en la propiedad de pérdida de memoria obtenemos que la variable aleatoria G_1 es de tipo fase, con la misma matriz de intensidades que Z_1. El problema es deteminar la distribución inicial $\pi+$ de G_1. Observemos, que una vez conocida $\pi+$, aplicando la parte (c2) del teorema 2.2, obtenemos que la distribución de M es de tipo fase con parámetros $(\pi+, \mathbf{T} + \mathbf{t}\pi+, d)$.

El siguiente resultado explica como obtener $\pi+$.

Lema 2.1. *El vector de probabilidades $\pi+$ verifica la ecuación vectorial no lineal*

$$\pi+ = \pi\int_0^\infty e^{(\mathbf{T}+\mathbf{t}\pi+)y} A(dy) \tag{2.4}$$

Demostración. Designemos mediante $\mathbf{m}$ la cadena de Markov asociada a la variable aleatoria M en (2.3), y mediante $\mathbf{m}^*$ la cadena correspondiente al máximo del proceso $\{S_{T_1+t} - S_{T_1-}\}$, donde T_1 es el primer instante de salto. (Es decir, para $\mathbf{m}^*$ suponemos que el proceso S comienza en un salto.) Las cadenas $\mathbf{m}$ y $\mathbf{m}^*$ tienen iguales matrices de transición $\mathbf{T} + \mathbf{t}\pi+$, y diferentes distribuciones iniciales: mientras $\mathbf{m}^*$ tiene distribución incial π, que conocemos, $\mathbf{m}$ tiene distribución inicial $\pi+$, que queremos determinar.

La observación clave es que $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}^*_{T_1}$, de donde resulta $\pi+ = \mathbf{m}_0 = \mathbf{E}\,\mathbf{m}^*_{T_1}$. Para calcular la esperanza condicionamos al suceso $\{T_1 = y\}$. La distribución de la cadena $\mathbf{m}^*$ en el instante y viene dada por $\pi e^{(\mathbf{T}+\mathbf{t}\pi+)y}$, de donde

$$\pi+ = \mathbf{E}\,\mathbf{m}^*_{T_1} = \mathbf{E}\,\mathbf{E}\left(\mathbf{m}^*_y \mid T_1 = y\right) = \int_0^\infty \pi e^{(\mathbf{T}+\mathbf{t}\pi+)y} A(dy),$$

concluyendo la demostración del lema $\square$

Veamos como se obtiene el resultado del teorema 1.2, a partir de este lema. Supongamos entonces que T_1 tiene distribución exponencial de parámetro α/c, es decir $A(x) = 1 - e^{-(\alpha/c)x}$, y Z_1 es exponencial de parámetro β, es decir, de tipo fase con parámetros $d = 1$, $\pi = (1)$, y $\mathbf{T} = [-\beta]$. Debemos determinar la constante $\pi+$. Sustituyendo en (2.4) obtenemos

$$\pi+ = \frac{\alpha}{c} \int_0^\infty e^{(-\beta+\beta\pi+)y} e^{-(\alpha/c)y} dy$$

de donde resulta $\pi+ = \frac{\alpha}{c\beta}$. Luego M es de tipo fase con parámetros $(\frac{\alpha}{c\beta}, \frac{\alpha}{c} - \beta, 1)$, su densidad es exponencial con defecto $1 - \frac{\alpha}{c\beta}$ y parámetro $\frac{\alpha}{c} - \beta$, y podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\exists t \geq 0\colon X_t \leq 0) = \mathbf{P}(\max S_t \geq x) &= \int_x^\infty \frac{\alpha}{c\beta}\Big(\frac{\alpha}{c} - \beta\Big) e^{-(\alpha/c-\beta)y} dy \\
&= \frac{\alpha}{c} e^{-(\alpha/c-\beta)x},
\end{aligned}$$

que es el resultado que obtuvimos en el teorema 1.2.

2.4 Problema de la ruina para procesos de Lévy con saltos negativos con distribución de tipo fase y positivos arbitrarios.

Consideremos un proceso de Lévy $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ con intensidad finita de saltos positivos, y con distribución de tipo fase. Supongamos que los saltos negativos son arbitrarios.

Para describir la medida de Lévy-Khinchine de X, consideremos una variable aleatoria auxiliar U de tipo fase, con distribución $B(y)$ y parámetros $(\pi, \mathbf{T}, d)$, donde d es un entero positivo, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ es la distribución de probabilidades inicial, $\mathbf{T}$ es la matriz de intensidades de transición, y $\mathbf{t}$ el vector asociado de tasas de salida.

La medida de Lévy-Khinchine considerada esta dada por

$$K(dy) = \begin{cases} \lambda b(y), & y > 0, \\ K^-(dy), & y < 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde $b(y) = B'(y) = \pi \exp(\mathbf{T}y)\mathbf{t}$ es la densidad de la variable aleatoria U, la constante $\lambda > 0$ es la intensidad de los saltos positivos, $K^-(dy)$ es una medida de Lévy-Khinchine arbitraria, con soporte en el conjunto $(-\infty, 0)$.

El problema del cálculo de la probabilidad de ruina es equivalente a determinar la distribución del máximo del proceso, que dada la constante $\gamma \geq 0$, es la variable aleatoria dada por

$$M = \max_{0 \leq t < T(\gamma)} X_t, \tag{2.6}$$

donde $T(\gamma)$ es una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\gamma > 0$, independiente de X, y definimos $T(0) = \infty$.

En todos los casos suponemos que la variable aleatoria M introducida no es degenerada. Esto siempre ocurre si $\gamma > 0$, y, si $\gamma = 0$, es consecuencia del siguiente supuesto: El proceso X tiende a $-\infty$, es decir, $\mathbf{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty) = 1$.

El exponente característico del proceso X en este caso es

$$\Psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{-\infty}^{0} \big(e^{zy} - 1 - zh(y)\big)K^-(dy) + \lambda(\mathbf{E}\, e^{zU} - 1), \tag{2.7}$$

donde la constante a es la tendencia, que esta determinada una vez que elejimos la función de truncación $h(y) = y\mathbf{1}_{\{-1<y<0\}}$ La constante $\sigma \geq 0$ es la varianza de la parte gausiana de X.

El último sumando en (2.7), designado $\Psi^+(z)$, verifica

$$\Psi^+(z) = \lambda(\mathbf{E}\, e^{zU} - 1) = \lambda\big(\pi(-z\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t} - 1\big), \tag{2.8}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de tamaño d. Si definimos $\Psi^-(z) = \Psi(z) - \Psi^+(z)$ podemos representar al proceso X como la suma de dos procesos de Lévy independientes: $X_t = X_t^+ + X_t^-$ $(t \geq 0)$ donde $X^+ = \{X_t^+\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy con exponente $\Psi^+(z)$; y $X^- = \{X_t^-\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy con exponente $\Psi^-(z)$.

Para determinar la distribución del máximo M en (2.6) debemos distinguir dos casos:

(A) El proceso X^- no es el opuesto de un subordinador. (Esto ocurre, si por ejemplo $\sigma > 0$.)

(B) El proceso X^- es el opuesto de un subordinador, incluyendo una tendencia deterministica negativa.

Comencemos por el caso (A). La idea es mostrar que M en (2.6) se puede obtener como el máximo de un paseo al azar asociado, cuyos sumandos son la diferencia de dos variables aleatorias independientes, la primera de las cuales tiene distribución de tipo fase ($-\infty$ modificada si $\gamma > 0$), y aplicar la teoría clásica de renovación de Pollachek-Khinchine, como se presenta en el capítulo VI de Asmussen [2].

Introduzcamos los momentos de salto positivo de X mediante

$$T_0 = 0, \qquad T_{n+1} = \inf\{t > T_n \colon \Delta X_t > 0\} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

y designemos

$$T_n^\gamma = T_n \wedge T(\gamma), \qquad T_n^0 = T_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Las variables aleatorias $T_{n+1} - T_n$ ($n = 0, 1, \dots$) son independientes y tienen distribución común exponencial con parámetro λ.

Consideremos ahora

$$U_0 = \max_{0 \le t < T_1^\gamma} X_t = \max_{0 \le t < T_1^\gamma} X_t^-. \tag{2.9}$$

Esta variable aleatoria es el máximo de un proceso de Lévy que no tiene saltos positivos (el proceso X^-), detenido en un tiempo independiente T_1^γ, con distribución exponencial con parámetro $\lambda + \gamma$.

En consecuencia, U_0 tiene distribución exponencial con parámetro p, la raíz positiva de la ecuación $\Psi^-(z) = \lambda + \gamma$ (ver Corolario VII.1.2 en Bertoin [4]).

Consideremos ahora la magnitud de los saltos positivos, ($-\infty$ modificada cuando $q > 0$) del proceso X, dada por

$$U_n = \begin{cases} \max\{X_t - X_{(T_n)-} \colon t \in [T_n, T_{n+1}^\gamma)\}, & \text{si } T_n < T(\gamma), \\ -\infty, & \text{si } T(\gamma) < T_n. \end{cases}$$

Para $n \geq 1$, en el suceso $\{T_n < T(\gamma)\}$ la variable aleatoria U_n es de tipo fase, porque

$$U_n = X_{T_n} - X_{(T_n)-} + \max_{T_n \leq t < T^{\gamma}_{n+1}} (X_t - X_{(T_n)}),$$

es la suma de dos variables independientes de tipo fase. La primera tiene distribución $B(y)$, y la segunda se distribuye como U_0 en (2.9).

En conclusión, condicionando al suceso $\{T_{n-1} < T(\gamma)\}$, obtenemos que la variable aleatoria U_n es defectiva con probabilidad $\gamma/(\lambda+\gamma)$, tiene distribución inicial

$$\mu = \Big(\frac{\lambda\pi_1}{\lambda+\gamma}, \dots, \frac{\lambda\pi_d}{\lambda+\gamma}, 0\Big),$$

y parámetros $(\mu, \mathbf{R}, d+1)$, donde la matriz de intensidades de transición $\mathbf{R}$, con su correspondiente vector de tasas de salida $\mathbf{r}$, viene dado por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1d} & t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{d1} & \cdots & t_{dd} & t_d \\ 0 & \cdots & 0 & -p \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

El estado absorbente, por conveniencia, es $\Delta = -\infty$.

Consideremos ahora la magnitud de los incrementos negativos

$$V_n = X_{(T_n)-} + U_n - X_{(T_{n+1})-} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Las variables aleatorias V_n son mutuamente independientes e idénticamente distribuídas, con distribución $A(y)$, y función característica

$$\begin{aligned} \hat{A}(z) &= \mathbf{E}\, e^{zV_1} = \mathbf{E}\, e^{-z(-V_1)} = \mathbf{E} \exp(-z \inf_{0 \leq t \leq T^{\gamma}_1} X^-_t) \\ &= \mathbf{E}\, e^{-zX^-_{T^{\gamma}_1}} \big(\mathbf{E}\, e^{-zU_0}\big)^{-1} \\ &= \frac{\lambda+\gamma}{\lambda+\gamma-\Psi^-(-z)} \times \frac{p+z}{p}. \end{aligned}$$

Este resultado se obtiene aplicando la factorización de Wiener-Hopf obtenida por Rogozin (1966), que puede verse también en Bertoin (1996, cap. VI).

Consideremos finalmente la sucesión $U_0, V_1, U_1, V_2, U_2, \dots,$ y pongamos $V_0 = 0$. Basados en la independencia de los incrementos del proceso de Lévy, obtenemos la independencia de los vectores $(V_0, U_0), (V_1, U_1), (V_2, U_2), \dots.$

Por otra parte, en cada intervalo de la forma $[T_n, T_{n+1})$, la descomposición por trayectorias del proceso (como se explica en el Teorema VI.2.5 de Bertoin (1996)) da como resultado que cada pareja V_n, U_n está formada por variables independientes. En conclusión, la sucesión considerada está conformada por variables aleatorias independientes.

En vista de nuestra construcción, tenemos

$$M = \max_{0 \leq t \leq T(\gamma)} X_t = \max_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} (U_k - V_k) = U_0 + \Big(\max_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n} (U_k - V_k) \Big)^+.$$

Tenemos que hallar entonces la distribución del máximo del paseo al azar $\sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$. Para calcular las distribuciones de "ladder heigt" aplicamos la Proposición VIII.4.3 en Assmussen (2000), consistente en tomar probabilidad condicional al suceso $\{V_1 = y\}$ e integrar con respecto de $A(dy)$, que permite obtener que estas distribuciones son de tipo fase, y tienen parámetros $(\mu+, \mathbf{R}, d+1)$, donde $\mu+$ es la solución de la ecuación vectorial no lineal

$$\mu+ = \mu \int_0^\infty \exp\big((\mathbf{R} + \mathbf{r}\mu+)y\big) A(dy) = \mu \hat{A}(\mathbf{R} + \mathbf{r}\mu+). \tag{2.11}$$

El máximo del paseo al azar $\big(\max_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)\big)^+$ es la composición geometrica de los ladder heights $(G_k)_{k \geq 1}$, cada uno de los cuales tiene distribución de tipo fase con representación $(\mu+, \mathbf{R}, d+1)$. En consecuencia, podemos escribir

$$M = U_0 + G_1 + \cdots + G_N$$

donde N es una variable aleatoria que toma valores naturales, con distribución geométrica, independiente del paseo a azar, con $P(N = 0) = 1 - \|\mu+\|$.

Como la variable aleatoria U_0 tiene parámetros $(\mathbf{e}_{d+1}, \mathbf{R}, d+1)$, donde

$$\mathbf{e}_{d+1} = (0, \ldots, 0, 1), \tag{2.12}$$

resulta que M es una composición geométrica de variables aleatorias de tipo fase, con la misma matriz de intensidad $\mathbf{R}$, la primera de las cuales tiene una distribución inicial diferente dada por $\mathbf{e}_{d+1}$. Según el ejemplo A5.10 en Asmussen (2000), resulta que la variable aleatoria M es de tipo fase, con parámetros $(\mathbf{e}_{d+1}, \mathbf{R} + \mathbf{r}\mu+, d+1)$.

Consideremos ahora el caso (B). La situación es mas sencilla, en particular, no tenemos necesidad de recurrir a resultados de fluctuaciones, y la reducción al cálculo de la distribución del máximo de un paseo al azar es más directa.

Indicamos entonces las diferencias entre lo hecho para el caso (A):

- Con la misma definición, $U_0 = 0$.
- Con la misma definición, para $n \geq 1$, tenemos $U_n = X_{T_n} - X_{(T_n)-}$, y $\mathbf{R} = \mathbf{T}$. La distribución inicial correspondiente a U_n es
$$\mu = \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\pi_1, \dots, \frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\pi_d\Big).$$
- Las variables aleatorias V_n se definen mediante la misma fórmula, pero
$$\hat{A}(z) = \mathbf{E}\, e^{zV_1} = \frac{\lambda+\gamma}{\lambda+\gamma-\Psi^-(z)},$$
resultando equivalente al caso $p = \infty$ en la fórmula obtenida en el caso (A).
- La distribución inicial del "ladder height" es $\pi+$, definida como la solución de la ecuación
$$\pi+ = \frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\pi\int_0^\infty \exp\big((\mathbf{T}+\mathbf{t}\pi+)y\big)A(dy) = \frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\pi\hat{A}(\mathbf{R}+\mathbf{r}\mu+). \tag{2.13}$$

En conclusión, en este caso
$$M = G_1 + \cdots + G_N$$
y la distribución de M es de tipo fase con parámetros $(\pi+, \mathbf{T}+\mathbf{t}\pi+, d)$.

De esta forma hemos obtenido el resultado siguiente (ver [18]).

Teorema 2.3. *Consideremos un proceso de Lévy X con exponente característico $\Psi(z)$ definido en (2.7) y (2.8) y una constante $\gamma \geq 0$. Sea $T(\gamma)$ una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\gamma > 0$ independiente de X, sea $T(0) = 0$, y definamos $M = \max\{X_t\colon 0 \leq t < T(\gamma)\}$. Entonces:*

- *En el caso (A), la variable aleatoria M es de tipo fase, con parámetros $(\mathbf{e}_{d+1}, \mathbf{R}+\mathbf{r}\mu+, d+1)$ definidos, respectivamente en (2.12), (2.10), y (2.11).*
- *En el caso (B), la variable aleatoria M es de tipo fase, con parámetros $(\pi+, \mathbf{T}+\mathbf{t}\pi+, d)$ definidos, respectivamente, en (2.2) y (2.13).*

2.5 Caso particular: Mezclas de exponenciales

Consideremos el caso particular en que los saltos positivos en (2.5) tienen distribución mezcla de exponenciales, es decir, distribución hiper-exponencial, con densidad

$$b(y) = \sum_{k=1}^{d} a_k \alpha_k e^{-\alpha_k y}, \qquad y > 0,$$

donde $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_d$, los coeficientes de mezcla $a_1, \dots, a_k$ verifican $a_1 + \cdots + a_d = 1$; son positivos, y $K^-(dy)$ sigue siendo arbitraria.

En este caso, el exponente característico en (2.7), está dado por

$$\Psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{-\infty}^{0} \big(e^{zy} - 1 - zh(y)\big) K^-(dy) + \lambda \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{z}{\alpha_k - z} \tag{2.14}$$

En el caso (A), la ecuación $\Psi(z) = \gamma$ tiene $d+1$ raíces positivas ρ_k, que verifican

$$0 < \rho_1 < \alpha_1 < \rho_2 < \cdots < \alpha_d < \rho_d + 1.$$

Esto es claro que en el caso $\gamma > 0$, y se obtiene de la condición $\Psi'(0+) > 0$ (que es equivalente a $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ *c.s.*) en el caso $\gamma = 0$ (ver Mordecki (1999)).

La función característica del incremento del paseo al azar asociado, en este caso, es

$$\begin{aligned}\hat{F}(z) = \mathbf{E}\exp(U_1 - V_1) &= \frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\,\mathbf{E}\, e^{zU} \frac{\lambda+\gamma}{\lambda+\gamma-\Psi^-(z)} \\ &= \frac{\Psi^+(z)+\lambda}{\lambda+\gamma-\Psi^-(z)}.\end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación $\hat{F}(z) = 1$ tiene las mismas $d+1$ raices reales positivas que la ecuación $\Psi(z) = \gamma$, y del Corolario VIII.4.6 en Asmussen (2000), obtenemos que la matriz $\mathbf{R} + \mathbf{r}\mu+$ tiene autovalores $-\rho_1, \dots, -\rho_{d+1}$.

Con esta información calculamos ahora la función característica de la variable aleatoria M. Introduciendo el vector incógnita $\mu+ = (x_1, \dots, x_{d+1})$,

$\mathbf{Q} = \mathbf{R} + \mathbf{r}\mu +$, y $\mathbf{q}$ el vector de tasas de salida, tenemos

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\alpha_d & \alpha_d \\ px_1 & \cdots & px_d & p(x_{d+1} - 1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p(x_1 + \cdots + x_{d+1} - 1) \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a (c) en el Teorema 2.1

$$\mathbf{E}\, e^{zM} = \mathbf{e}_{d+1}(-zI - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{q}. \tag{2.15}$$

En vista de los ceros en los vectores $\mathbf{e}_{d+1}$ y $\mathbf{q}$, tenemos que calcular un único elemento de la matriz inversa en (2.15). Como conocemos los autovalores de $\mathbf{Q}$, tenemos $\det(\mathbf{Q} - zI) = \prod_{k=1}^{d+1}(-\rho_k - z)$, y $\det(-\mathbf{Q} - zI) = (-1)^{d+1}\det(\mathbf{Q} + zI) = \prod_{k=1}^{d+1}(z - \rho_k)$. La regla de Cramer para la inversa de una matriz, nos da

$$\mathbf{E}\, e^{zM} = p\big(\|\mu + \| - 1\big) \times \frac{\prod_{k=1}^{n}(z - \alpha_k)}{\prod_{k=1}^{d+1}(z - \rho_k)}.$$

Esta expresión evaluada en $z = 0$, es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, e^{zM} &= \frac{\prod_{k=1}^{d}(z - \alpha_k)}{\prod_{k=1}^{d+1}(z - \rho_k)} \times \frac{\prod_{k=1}^{d}(-\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{d+1}(-\rho_k)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{d}(1 - z/\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{d+1}(1 - z/\rho_k)} = \sum_{k=1}^{d+1} A_k \frac{\rho_k}{\rho_k - z}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde los coeficientes $A_1, \ldots, A_{d+1}$ introducidos en la última expresión se calculan con el teorema de las fracciones simples, y resultan ser

$$A_j = \frac{\prod_{k=1}^{d}(1 - \rho_j/\alpha_k)}{\prod_{k=1, k\neq j}^{d+1}(1 - \rho_j/\rho_k)} \qquad (j = 1, \ldots, d+1).$$

Este es el resultado obtenido por otros métodos en Mordecki (1999).

Consideremos el caso (B). Como X^- es el opuesto de un subordinador, basados en Bertoin (1996, pp. 72–73), obtenemos que

$$\Psi^-(z) = az + \int_{-\infty}^{0}(e^{zy} - 1)K^-(dy),$$

donde $a \leq 0$, y $\int_{-\infty}^{0} \big(1 \wedge |y|\big) K^{-}(dy) < \infty$, es decir, el proceso X^{-} tiene necesariamente variación finita y tendencia negativa. Además, $\lim_{x\to\infty} \Psi^{-}(x) = a$ (x real).

Basándonos en estas consideraciones, y en el hecho de que la función $\Psi^{-}(x)$ es convexa, obtenemos que la ecuación

$$\Psi(z) = az + \int_{-\infty}^{0} (e^{zy} - 1) K^{-}(dy) + \lambda \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{z}{\alpha_k - z} = \gamma \tag{2.17}$$

tiene d raíces reales y positivas ρ_k ($k = 1, \dots, d$), que verifican

$$0 < \rho_1 < \alpha_1 < \cdots < \rho_d < \alpha_d. \tag{2.18}$$

Esto es nuevamente claro en el caso $\gamma > 0$, y se obtiene como consecuencia de que $\Psi'(0+) > 0$ (que equivale a $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ *c.s.*) en el caso $\gamma = 0$.

Consideremos ahora el proceso de Lévy ε-perturbado $X^{\varepsilon} = \{X_t^{\varepsilon}\}_{t\geq 0}$, con exponente característico

$$\Psi^{\varepsilon}(z) = az + \frac{1}{2}\varepsilon^2 z^2 + \int_{-\infty}^{0} (e^{zy} - 1) K^{-}(dy) + \lambda \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{z}{\alpha_k - z},$$

que verifca las hypothesis de caso (A) recién analizado, y por lo tanto tiene $d + 1$ raíces ρ_k^{ε} ($k = 1, \dots, d + 1$), que verifican

$$0 < \rho_1^{\varepsilon} < \alpha_1 < \rho_2^{\varepsilon} < \cdots < \alpha_d < \rho_{d+1}^{\varepsilon}.$$

Como $\varepsilon \to 0$, tenemos $\rho_k^{\varepsilon} \to \rho_k$ ($k = 1, \dots, d$) en (2.18), y $\rho_{d+1}^{\varepsilon} \to \infty$. Como $\Psi^{\varepsilon}(z) \to \Psi(z)$ en (2.17), tenemos convergencia débil de procesos, y en consecuencia,

$$M^{\varepsilon} = \max_{0\leq t<T(\gamma)} X_t^{\varepsilon} \to M = \max_{0\leq t<T(\gamma)} X_t \qquad \text{(débilmente)}.$$

La función característica de M se obtiene tomando límite en (2.16), entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, e^{zM} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\, e^{zM^{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\prod_{k=1}^{d}(1 - z/\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{d+1}(1 - z/\rho_k^{\varepsilon})} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{d}(1 - z/\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{d}(1 - z/\rho_k)} = \sum_{k=1}^{d} A_k \frac{\rho_k}{\rho_k - z}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde, en el último paso, si utilizamos nuevamente el teorema de las fracciones simples obtenemos que

$$A_j = \frac{\prod_{k=1}^{d}(1-\rho_j/\alpha_k)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{d}(1-\rho_j/\rho_k)} \qquad (j=1,\dots,d).$$

Esto concluye la demostración del resultado siguiente (obtenido en [18]).

Teorema 2.4. *Sea X un proceso de Lévy con saltos positivos con intensidad finita, y distribución hiper-exponencial, y exponente característico dado en* (2.14)*. Sea $\gamma \geq 0$ y $T(\gamma)$ una variabla aleatoria con distribución exponencial independiente de X, con parámetro $\gamma > 0$; pongamos $T(0) = 0$, y definamos $M = \max\{X_t : 0 \leq t < T(\gamma)\}$. Entonces:*

- *En el caso* (A)*, la variable aleatoria M también tiene distribución hiper-exponencial, con $d+1$ componentes, y función característica dada en* (2.16)*.*
- *En el caso* (B)*, la variable aleatoria M también tiene distribucińı hiper-exponencial, ahora con d componentes, y función característica dada en* (2.19)*.*

Capítulo 3

Aplicaciones en finanzas: valuación de opciones

3.1 Modelo de mercado financiero. Opciones

Consideremos un modelo matemático de un mercado financiero con dos activos. El primero es el activo sin riesgo $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$, que modela una caja de ahorros con tasa de interés instantáneo r, y evolución

$$B_t = B_0 e^{rt},$$

La evolución de un segundo activo es modelada a través de un proceso aleatorio,

$$S = \{S_t\}_{t\geq 0} \text{ donde } S_0 \text{ es una constante positiva,}$$

definido en un espacio de probabilidad (Ω, F, P). Cuando sea necesario, consideraremos una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$, y supondremos que se cumplen las hipótesis habituales, ver [9].

Opciones

En el modelo anterior se introduce un tercer activo llamado opción de compra, o *call option* que es un acuerdo realizado entre dos partes en $t = 0$ en la cual una se compromete a vender una unidad de S (una acción) a la otra parte, en el tiempo T a precio K acordado.

- *Lanzador* es quien emite la opción, tiene obligación de vender una unidad de S a precio K en tiempo T.

- *Poseedor, tenedor (holder)* es quien recibe la opción, y tiene la posibilidad de comprar esa unidad de S.
- T es el *tiempo de ejercicio o maduración* de la opción.
- K es el *precio de ejercicio de la opción*
- $(S_T - K)^+$ se llama *premio* de la opción
- El activo S sobre el cual se realiza la opción se llama *subyacente*.

Como el poseedor de la opción la ejecuta solo si $S_T > K$, es equivalente pensar, que el compromiso consiste en pagar al poseedor $S_T - K$ si esta cantidad es positiva, o cero en caso contrario. Se pagaría entonces

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0).$$

Se puede pensar que

- Una opción es un *seguro* contra el evento que el precio S_T supere un determinado valor K.
- Una opción es una *apuesta*: Apuesto a que S_T supera K, y gano la diferencia.

Opciones de venta (put options)

Supongamos ahora, que el lanzador se compromete a *comprar* en T una acción a precio K. Esta opción, llamada europea de compra (put option) es equivalente a la anterior, con la diferencia de que el premio es $(K - S_T)^+$.

Mas en general, el compromiso puede suponer en pagar una cantidad dependiente de S_T, que notaremos $f(S_T)$.

Opciones americanas

Las opciones americanas introducen en el contrato la siguiente variante:

- El poseedor puede reclamar la compra (venta) de la acción en cualquier momento entre 0 y T. Es decir, permiten el *ejercicio anticipado*.

En términos técnicos, el tiempo de ejercicio de la opción elegido por el poseedor, y notado τ es un tiempo de parada, por ser una variable aleatoria que no depende de información futura, lo que se formaliza mediante:

$$\tau : \Omega \to [0, +\infty] \text{ y } \{\tau \le t\} \in F_t \text{ para cada } t \ge 0.$$

El problema matemático que presenta la introducción de opciones en un modelo es la valuación, valoración (*pricing*) de estos contratos. ¿Cuánto debe pagar el poseedor de la opción por este derecho?

En el caso de las opciones europeas, la solución a este problema fue dada por Black y Scholes en [5], basados en el principio de la réplica de la opción y obteniendo una fórmula sencilla.

Las opciones americanas, se valúan utilizando los mismos principios que las europeas, con la diferencia de no existir fórmulas cerradas para el precio. Una excepción relevante a esta ausencia de fórmulas es el caso *perpetuo*. En el caso perpetuo no se impone límite de tiempo al poseedor de la opción para su ejercicio, es decir, se toma $T = \infty$. Del punto de vista matemático, en el caso americano, la valuación de la opción, consiste en hallar no solo el precio de la opción, sino también la estrategia óptima para el poseedor (el mejor tiempo de parada) es un problema de programación dinámica con horizonte infinito, y en algunos casos admite soluciones explícitas.

3.2 Bachelier 1900

Enfocamos ahora la pregunta de que modelo matemático utilizar para la evolución del activo con riesgo S, el subyacente.

En el año 1900, más precisamente el 29 de marzo, Louis Bachelier defendió exitosamente su tesis en la Sorbona, titulada "Théorie de la Spéculation" bajo la supervisión de Henri Poincaré [3]. Los aspectos históricos y su relevancia están destacados en [6]. Allí se introduce el movimiento Browniano como límite de paseos al azar simples, y es descubierto que la ley $(\Delta W)^2 = \Delta t$ relaciona la evolución espacio-temporal para los activos financieros en la bolsa parisina. Bachelier supuso entonces, en el modelo de mercado financiero introducido, que (con la notación moderna) el activo con riesgo $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$

$$S_t = S_0 + at + \sigma W_t$$

donde $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano o proceso de Wiener.

Agregamos el dato histórico, que R. Brown observó en un experimento en 1826, movimientos de granos de polen en suspensión cuyas trayectorias eran similares a las observadas en los activos financieros, y de allí la denominación de Browniano para este tipo de procesos.

Tomando la notación de la teoría de las semimartingalas, identificaremos también cada distribución de un proceso de Lévy con una tripleta (b, σ, Π). Los procesos de Lévy son la clase menor de procesos, cerrada frente a la suma de procesos independientes, y los límites débiles, que contienen al movimiento Browniano de las finanzas, y a los procesos de Poisson compuestos de la matemática actuarial.

El modelo de la bolsa parisina, introducido por Bachelier es un proceso de Lévy con tripleta $(a, \sigma, 0)$. El proceso de riesgo con N de Poisson con parámetro λ, tiene tripleta $(a, 0, \lambda F(-dx))$, si $F(dx)$ denota la distribución de las variables de reclamo de Y.

3.3 Opciones europeas. Black - Scholes 1973

Consideremos un modelo matemático de un mercado financiero como en la clase anterior, ahora con la modificación introducida por Samuelson [22]. El activo sin riesgo (bono) $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$, viene dado por

$$B_t = B_0 e^{rt},$$

y la evolución del segundo activo (activo con riesgo, *risky asset* o *stock*) es modelada a través de la exponencial de un movimiento Browniano con tendencia $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$, dado por

$$S_t = S_0 e^{at + \sigma W_t} = e^{x + at + \sigma W_t}$$

donde $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano, y notamos $S_0 = e^x$.

La fórmula de Black y Scholes (1973) [5] da el precio *racional* o precio *justo* para las opciones europeas. Analicemos el caso de las opciones de compra, o *call options*. El principio para obtener este resutado es el de *cobertura perfecta o hedging*:

Es posible construir un portafolio en forma dinámica, constituido por β_t bonos y γ_t acciones que totalizan un capital en el instante t dado por $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$ tal que

1. Es un portafolio autofinanciante (*self-financing*)

   $$B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0.$$

   Esta condición significa que en el transcurso del tiempo, el portafolio varia únicamente por cambios en la proporción de bonos y acciones, y por la fluctuación del precio de estos activos, y no se introduce ni se extrae capital.

2. En $t = T$ el capital del portafolio coincide con el compromiso asumido por el lanzador de la opción, es decir

   $$X_T = \beta_T B_T + \gamma_T S_T = (S_T - K)^+$$

Basado en este principio, el precio se define como el capital inicial necesario para construir un portafolio que cumpla las propiedades anteriores, lo que trivializa la introducción de la opción europea en el modelo, ya que es equivalente a una posibilidad de inversión preexistente. El valor de la opción viene dado por la *Fórmula de Black y Scholes* que, notando $V(S_0,T)$ al precio de esta opción, establece

$$V(S_0,T) = S_0\Phi(x_g) - Ke^{-rT}\Phi(x_p)$$

con

$$x_g = \frac{\ln(x/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$x_p = \frac{\ln(x/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria gaussiana.
Comentarios:

1. Dos herramientas de cálculo estocástico utilizadas en la obtención de esta fórmula son

   - La fórmula de Itô, que expresa los diferenciales de funciones del movimiento Browniano,
   - El teorema de Girsanov, que permite expresar la densidad de Radom-Nykodym entre dos medidas de probabilidad equivalentes en el espacio de trayectorias de los procesos estocásticos que estamos considerando.

2. Un resultado importante de este cálculo es que existe una *única* medida de probabilidad P^*, llamada medida *libre de riesgo* o *risk-neutral probability*, y que el precio de la opción se puede calcular como una esperanza matemática bajo esta medida,

   $$V(S_0,T) = E^*[e^{-rT}(S_T - K)^+].$$

   P^* esta caracterizada por la condición

   $$\frac{S_t}{B_t} \text{ es una martingala bajo } P^*$$

   Se dice también que el mercado es *completo*, y existe un resultado clave que establece que la posibilidad de construir una cobertura perfecta está relacionada con la unicidad de la medida que cumple la condición anterior. Por detalles, ver [10] o [23]

3.4 Opciones americanas y parada óptima

Denotemos ahora por τ el tiempo de ejercicio de la opción que es elegido por el poseedor de la opción (*holder*), y cumple

$$0 \leq \tau \leq T.$$

Si $V_A(S_0, T)$ es el precio de una opción americana, tenemos que encontrar

- El *precio racional* de de la opción
- El *tiempo óptimo de ejercicio*, que notaremos τ^*, para esta opción.

Para obtener la solución de este problema, nos basamos en argumentos similares al caso europeo, es decir apelamos a construir una *cobertura perfecta* con la diferencia que en este caso debemos tener en cuenta no solamente el último instante T, y la propiedad de autofinanciación, sino que el capital de nuestro portafolio dinámico debe cumplir

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t \geq (S_t - K)^+ \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

El resultado de este planteo es que

$$V_A(S_0, T) = \sup_{\tau} E^*[e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+] = E^*[e^{-r\tau^*}(S_{\tau^*} - K)^+]$$

es decir, el precio de la opción americana está dado por la función de costo de un problema de parada óptima. Los detalles pueden verse en [24].

Un ejemplo importante que admite solución cerrada es el caso de una opción de compra americana (sobre una acción que no paga dividendos), cuyo precio resulta ser equivalente al de la opción europea, y el momento óptimo de ejercicio es $\tau^* = T$. Es un resultado de Merton de 1973, [14]. En el caso general, cuando los activos pagan dividendos, o se consideran opciones americanas de venta, las soluciones son calculadas basicamente mediante tres métodos

1. Cálculo numérico sobre una ecuación en derivadas parciales con frontera movil

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}(x,t) + rxV_x(x,t) + V_t(x,t) = rV(x,t)$$

bajo la condición

$$V(x, T) \geq (K - x)^+.$$

2. Resolución del problema para paseos al azar, basados en la inducción hacia atrás de la programación dinámica.

3. Métodos montecarlo.

3.5 Valuación de opciones perpetuas para un proceso de Lévy

En esta sección exponemos en primer lugar un resultado que da probabilidades de ruina exactas para procesos de Lévy, cuando los saltos positivos son arbitrarios y los negativos están distribuidos de acuerdo a una mezcla de exponenciales, similar al caso de los paseos al azar. En segundo lugar, damos precios para opciones perpetuas cuando el activo con riesgo tiene como fuente de incertidumbre un proceso de Lévy. Tanto las funciones de costo como los tiempos óptimos se expresan en función de la distribución del máximo del proceso de Lévy, detenido en un instante aleatorio exponencial e independiente del proceso, en el caso de que el stock pague dividendos. Como la distribución del máximo, es la probabilidad de ruina del proceso dual o inverso, obtenemos que los precios de opciones se podrán calcular, una vez conocidas estas probabilidades de ruina. Los resultados aqui presentados fueron obtenidos en [17] y [16].

Consideremos un modelo con $S_t = S_0 e^{X_t}$ y $\delta > 0$. Daremos la solución del problema de parada óptima

$$V_C(S_0) = \sup_{\tau \geq 0} E\big(e^{-(r+\delta)\tau}(S_\tau - K)^+\big).$$

que corresponde a la valaución de opciones perpetuas de compra con dividendos. Recordamos que el caso sin dividendos es trivial.

Teorema 3.1 (Call perpetuo con dividendos). *Sea*

$$M = \sup_{0 \leq t < \tau(r+\delta)} X_t$$

con $\tau(r+\delta)$ una variable exponencial con parámetro $r+\delta$, e independiente de X. Entonces $E(e^M) < \infty$, la función de costo del problema de parada óptima es

$$V_C(S_0) = \frac{E[S_0 e^M - KE(e^M)]^+}{E(e^M)},$$

y el tiempo óptimo de parada

$$\tau_c^* = \inf\{t \geq 0\colon S_t \geq S_c^*\},$$

con $S_c^* = KE(e^M)$.

Nota: Este teorema es una generalización directa del correspondiente para paseos al azar, en Darling, Ligget y Taylor (1972) [7].

Consideremos el caso de una opción de venta. Sea ahora la tasa de dividendos $\delta \geq 0$, y consideremos el problema

$$V_P(S_0) = \sup_{\tau \geq 0} E\big(e^{-(r+\delta)\tau}(K - S_\tau)^+\big).$$

Teorema 3.2 (Put perpetuo con dividendos). *Notemos*

$$I = \inf_{0 \leq t < \tau(r+\delta)} X_t$$

con $\tau(\delta + r)$ *como en el Teorema anterior. Luego* $E(e^I) > 0$ *y*

$$V_P(S_0) = \frac{E[KE(e^I) - S_0 e^I]^+}{E(e^I)}.$$

El tiempo de parada óptimo es

$$\tau_p^* = \inf\{t \geq 0\colon S_t \leq S_p^*\},$$

donde $S_p^* = KE(e^I)$.

El siguiente corolario es de interés por la similitud de las fuciones de costo para opciones perpetuas americanas y la fórmula de Black y Scholes

Corolario 3.1 (Fórmula B-S). *(a) Si* $\delta > 0$

$$V_C(S_0) = S_0 \tilde{P}(S_0 e^M \geq S_c^*) - KP(S_0 e^M \geq S_c^*),$$

donde $\tilde{P}$ *es la medida definida por*

$$d\tilde{P} = \frac{e^M}{E(e^M)} dP.$$

(b) Si $\delta \geq 0$,

$$V_P(S_0) = KP(S_0 e^I \leq S_p^*)) - S_0 \tilde{P}(S_0 e^I \leq S_p^*)),$$

donde $\tilde{P}$

$$d\tilde{P} = \frac{e^I}{E^*(e^I)} dP.$$

3.6 Fórmulas cerradas para saltos exponenciales

La combinación de los resultados anteriores, es decir, la sustitución de las densidades del máximo y mínimo del proceso de Lévy en los resultados anteriores produce las siguientes fórmulas cerradas.

Teorema 3.3 (Call perpetuo). *Sea X un proceso de Lévy con saltos positivos mezcla de exponenciales. Para $\delta > 0$, sea*

$$S_c^* = K \sum_{k=1}^{n+1} A_k \frac{p_k}{p_k - 1},$$

con $0 < p_1 < \cdots < p_{n+1}$ las raices positivas de $\Psi(p) = r+\delta$, y los coeficientes $A_1, \ldots, A_{n+1}$ como antes. El precio de un call perpetuo es

$$V_c(S_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k}{p_k - 1} \left(\frac{S_0}{S_c^*}\right)^{p_k} & S_0 \leq S_c^*, \\ \\ S_0 - K & S_0 > S_c^*. \end{cases}$$

El ejercicio óptimo viene dado por

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \geq S_c^*\}.$$

Comentarios:

- Si $\Pi = 0$, es decir, tenemos el modelo de Black y Scholes sin saltos se obtiene en este Teorema el resultado de Merton de 1973, [14]
- Si los saltos positivos son exponenciales con densidad $h(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ y los negativos nulos, es decir $\pi = 0$ se obtienen los resultados en [15].

Teorema 3.4 (Put perpetuo). *Sea X un proceso de Lévy con saltos negativos distribuidos de acuerdo a una mezcla de exponenciales. Notemos, para $\delta \geq 0$,*

$$S_p^* = K \sum_{k=1}^{n+1} B_k \frac{q_k}{q_k + 1},$$

donde $-q_1, \ldots, -q_{n+1}$, son las raices negativas de $\Psi(p) = r + \delta$, y los coeficientes $B_1, \ldots, B_{n+1}$ son como antes. El precio del put perpetuo es

$$V_P(S_0) = \begin{cases} K - S_0 & S_0 \leq S_p^*, \\ \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_k}{q_k + 1} \left(\frac{S_0}{S_p^*}\right)^{q_k} & S_0 > S_p^*. \end{cases}$$

El ejercicio óptimo viene dado por

$$\tau_p^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \leq S_p^*\}.$$

Comentarios:

- Si $\Pi = 0$, es decir, consideramos el modelo B-S sin saltos, se obtiene el resultado de Mc Kean de 1965, [13].
- Si $h(x) = 0$ y $\pi = \lambda F$, F una distribución de probabilidad, obtenemos el resultado de X.L. Zhang de 1995, [25].
- Si el proceso de Lévy viene dado por $X_t = at + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ con $\{Y_i\}$ v.a.i.i.d. con distribuciones mezcla de exponenciales a ambos lados, podemos obtener fórmulas cerradas para opciones perpetuas call y put en forma simultánea. Parece ser un modelo lo suficientemente general para modelar datos empíricos con saltos "grandes" y suficientemente parsimonioso para obtener fórmulas cerradas.

Referencias

[1] Asmussen, S. Phase-type representations in random walk and queueing problems. The Annals of Probability (1992) Vol. 20, No. 2, 772–789

[2] Asmussen, S. Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore, 2000.

[3] Bachelier L. Théorie de la spéculation. Ann. Ecole Norm. Sup., 1900, v. 17, pp 21–86. (Reprinted in: The random character of stock market prices. Ed. by P.H. Cootner Cambridge, Massachusetts: MIT Preess, 1967. pp. 17–78.)

[4] Bertoin J., Lévy Processes. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] Black, R. Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy **81**, 637–659 (1973)

[6] Courtault, J.M., Kabanov, Y., Bru, B., Crépel, P. Lebon, I., Le Marchand, A. *Louis Bachelier on the centenary of Théorie de la spéculation.* Mathematical Finance, **10**, 3, July 2000, 341 – 353.

[7] Darling, D.A., Ligget, T. Taylor, H.M. (1972). Optimal stopping for partial sums. *The Annals of Mathematical Statistics*, **43** 1363–1368.

[8] Embrechts, Paul; Klppelberg, Claudia; Mikosch, Thomas. Modelling extremal events. For insurance and finance. Applications of Mathematics, 33. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] Jacod, J. and Shiryaev, A.N., (1987) *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer, Berlin, Heidelberg.

[10] Karatzas, I., Shreve, S.E.: *Methods of Mathematical Finance*. New York Berlin Heidelberg: Springer 1998

[11] Kemperman, J.H.B., The passage problem for a stationary Markov chain. The University of Chicago Press, Chicago, 1961.

[12] Lundberg F. **I** Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen. **II** øAterförsäkring av Kollektivrisker. Alqvimist & Wiksell, Uppsala. (1903)

[13] Mc Kean, Jr. H.P.: "Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in Mathematical Economics". Industrial Management Review **6**, (spring) 32–39 (1965).

[14] Merton, R.C.: Theory of rational option pricing, Bell J. Econom. Manag. Sci. **4**, 141–183 (1973)

[15] Mordecki, E. Optimal stopping for a diffusion with jumps. Finance and Stochastics **3** (2) 227–236 (1999)

[16] Mordecki E. Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes. Finance and Stochastics. Volume VI (2002) 4, 473-493

[17] Mordecki E. (1999) Ruin probabilities for a Lévy process with mixed exponential negative jumps. Premat 99/28. Theory of Probability and its Applications (to appear)

[18] E. Mordecki. The distribution of the maximum of a Lévy processes with positive jumps of phase-type. Theory of Stochastic Processes, 8(24), 2002, N3-4, pp. 309-316.
http://kolmogorov.cmat.edu.uy/ mordecki/publications.html

[19] M. F. Neuts. Matrix-Geometric solutions in Sotchastic Models. Johns Hopkins University Press, Baltimore. London (1981)

[20] V. Petrov, E. Mordecki. Teoría de Probabilidades. Editorial URSS, Moscu, 2002. 268 pp.

[21] Rogozin, B.A.(1966). On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments. Theory of Probability and its Applications, Vol. XI, 4, 580–591.

[22] Samuelson, P.A. Rational Theory of Warrant Pricing. Industrial Management Reviews. **6** 13–32 (1965)

[23] Shiryaev, A. N. *Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory.* Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, 3. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

[24] Shiryaev, A.N., Kabanov, Y. M., Kramkov, D.O., Melnikov, A.V.: On the pricing of options of European and American types, II. Continuous time. Theory of Probability and Applications **39**, 80–129 (1994)

[25] Zhang, X.L.: Formules quasi-explicites pour les options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. Mathematics and Computers in Simulation **38**, 151–161 (1995).