Procesos de Lévy en matemática financiera y actuarial [1]

Curso dictado en la
Universidad Tecnológica Metropolitana
Santiago, Chile. 18, 19 y 20 de diciembre de 2000

Ernesto Mordecki

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias, Montevideo, Uruguay
http://www.cmat.edu.uy/~mordecki
mordecki@cmat.edu.uy

22 de diciembre de 2000

[1] Disponible en http://kolmogorov.cmat.edu.uy/~mordecki/cursos/utem/

Presentación.

En el curso *Procesos de Lévy en matemática financiera y actuarial* nos proponemos modelar la evolución de un activo financiero mediante un proceso de Lévy, y resolver en ese modelo problemas de valuación de opciones y cálculo de probabilidades de ruina. Dicha propuesta se basa en que

- Esta propuesta abarca en fórma simultánea los modelos cuya fuente de inciertidumbre son el movimiento Browniano, cuyo primer modelo matemático fue introducido en el marco de las finanzas en 1900 por L. Bachelier [1], luego replanteados por Samuelson (1965) [2], Merton (1973) en [3], y Black y Scholes (1973) en [4], y el modelo de procesos de riesgo, de Poisson compuestos (risk process) introducidos en el terreno actuarial por Lundberg en 1903 [5], y consolidados por H. Crámer y la escuela de Estocolmo.

- Los problemas que nos planteamos resolver en este modelo son entonces de interés tanto para la matemática actuarial como para las finanzas.

Esta doble síntesis descrita encuentra un resultado llamativo en [6] donde se demuestra que la solución de problemas de ambas disciplines, (la ruina y la valación de opciones perpetuas) están íntimamente relacionados.

En la solución de los problemas se utiliza el cálculo estocástico para semimartingalas de [7]. Estos, tienn como potenciales aplicaciones la valuación de activos derivados, así como la resolución de problemas actuariales.

Es de destacar, que paralelamente a este esfuerzo de unificación teórica de resultados en las áreas de la matemática financiera y actuarial, en el presente se verifica una convergencia en la práctica de estas actividades, como se expone en [8]

Contenidos

Clase 1

Opciones, probabilidades de ruina, y procesos de Lévy

1.1 Modelo de mercado financiero. Opciones

Consideremos un modelo matemático de un mercado financiero con dos activos. El primero es el activo sin riesgo $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$, que modela una caja de ahorros con tasa de interés instantáneo r, y evolución

$$B_t = B_0 e^{rt},$$

La evolución de un segundo activo es modelada a través de un proceso aleatorio,

$$S = \{S_t\}_{t\geq 0} \text{ donde } S_0 \text{ es una constante positiva,}$$

definido en un espacio de probabilidad (Ω, F, P). Cuando sea necesario, consideraremos una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$, y supondremos que se cumplen las hipótesis habituales, ver [7].

Opciones

En el modelo anterior se introduce un tercer activo llamado opción de compra, o *call option* que es un acuerdo realizado entre dos partes en $t = 0$ en la cual una se compromete a vender una unidad de S (una acción) a la otra parte, en el tiempo T a precio K acordado.

- *Lanzador* es quien emite la opción, tiene obligación de vender una unidad de S a precio K en tiempo T.
- *Poseedor, tenedor (holder)* es quien recibe la opción, y tiene la posibilidad de comprar esa unidad de S.
- T es el *tiempo de ejercicio o maduración* de la opción.
- K es el *precio de ejercicio de la opción*
- $(S_T - K)^+$ se llama *premio* de la opción
- El activo S sobre el cual se realiza la opción se llama *subyacente*.

Como el poseedor de la opción la ejecuta solo si $S_T > K$, es equivalente pensar, que el compromiso consiste en pagar al poseedor $S_T - K$ si esta cantidad es positiva, o cero en caso contrario. Se pagaría entonces

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0).$$

Se puede pensar que

- Una opción es un *seguro* contra el evento que el precio S_T supere un determinado valor K.
- Una opción es una *apuesta*: Apuesto a que S_T supera K, y gano la diferencia.

Opciones de venta (put options)

Supongamos ahora, que el lanzador se compromete a *comprar* en T una acción a precio K. Esta opción, llamada europea de compra (put option) es equivalente a la anterior, con la diferencia de que el premio es $(K - S_T)^+$.

Mas en general, el compromiso puede suponer en pagar una cantidad dependiente de S_T, que notaremos $f(S_T)$.

Opciones americanas

Las opciones americanas introducen en el contrato la siguiente variante:

- El poseedor puede reclamar la compra (venta) de la acción en cualquier momento entre 0 y T. Es decir, permiten el *ejercicio anticipado*.

En términos técnicos, el tiempo de ejercicio de la opción elegido por el poseedor, y notado τ es un tiempo de parada, por ser una variable aleatoria que no depende de información futura, lo que se formaliza mediante:

$$\tau\colon \Omega \to [0, +\infty] \text{ y } \{\tau \leq t\} \in F_t \text{ para cada } t \geq 0.$$

El problema matemático que presenta la introducción de opciones en un modelo es la valuación, valoración (*pricing*) de estos contratos. ¿ Cuanto debe pagar el poseedor de la opción por este derecho?

En el caso de las opciones europeas, la solución a este problema fue dada por Black y Scholes en [4], basados en el principio de la réplica de la opción y obteniendo una fórmula sencilla.

Las opciones americanas, se valúan utilizando los mismos principios que las europeas, con la diferencia de no existir fórmulas cerradas para el precio. Una excepción relevante a esta ausencia de fórmulas es el caso *perpetuo*. En el caso perpetuo no se impone límite de tiempo al poseedor de la opción para su ejercicio, es decir, se toma $T = \infty$. Del punto de vista matemático, en el caso americano, la valuación de la opción, consiste en hallar no solo el precio de la opción, sino también la estrategia óptima para el poseedor (el mejor tiempo de parada) es un problema de programación dinámica con horizonte infinito, y en algunos casos admite soluciones explícitas.

1.2 Bachelier 1900

Enfocamos ahora la pregunta de que modelo matemático utilizar para la evolución del activo con riesgo S, el subyacente.

En el año 1900, más precisamente el 29 de marzo, Louis Bachelier defendió exitosamente su tesis en la Sorbona, titulada "Théorie de la Spéculation" bajo la supervisión de Henri Poincaré [1]. Los aspectos históricos y su relevancia están destacados en [9]. Allí se introduce el movimiento Browniano como límite de paseos al azar simples, y es descubierto que la ley $(\Delta W)^2 = \Delta t$

relaciona la evolución espacio-temporal para los activos financieros en la bolsa parisina. Bachelier supuso entonces, en el modelo de mercado financiero introducido, que (con la notación moderna) el activo con riesgo $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$

$$S_t = S_0 + at + \sigma W_t$$

donde $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano o proceso de Wiener.

Agregamos el dato histórico, que R. Brown observó en un experimento en 1826, movimientos de granos de polen en suspensión cuyas trayectorias eran similares a las observadas en los activos financieros, y de allí la denominación de Browniano para este tipo de procesos.

1.3 Movimiento Browniano

El movimiento Browniano o proceso de Wiener en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso aleatorio, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ tal que

- Sus trayectorias son continuas.
- Sus incrementos son independientes. Si $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, entonces

  $$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  son variables aleatorias independientes.
- $W_0 = 0$, $\quad W_t - W_s$ es una variable gaussiana, con media cero y varianza $t - s$, es decir

  $$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

Recordemos que X es gaussiana o normal ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) cuando su distribución de probablidad es

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

La densidad es la campana de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Algunas consecuencias

- La variable W_t es normal, centrada, y tiene varianza t.

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

- El incremento ΔW del proceso, es $\mathcal{N}(0, \Delta t)$. Consideremos la variable $(\Delta W)^2$. Tenemos

$$E((\Delta W)^2) = \Delta t, \qquad V((\Delta W)^2) = 2(\Delta t)^2$$

Luego, si $\Delta t \to 0$, la varianza es menor que la esperanza, luego la variable se "aproxima" a su valor esperado, lo que notaremos

$$(\Delta W)^2 \sim \Delta t, \quad \text{o sugestivamente} \quad (dW)^2 = dt$$

- Una forma equivalente de ver esta propiedad, es demostrando que, si un intervalo $[a, b]$ se parte en n subintervalos Δt_i iguales, y se consideran los incrementos ΔW_i en cada subintervalo, se cumple

$$\lim_{n \to +\infty} \sum (\Delta W_i)^2 = b - a.$$

donde el límite es en probabilidad.

1.4 Problema de la ruina. Lundberg 1903

Consideremos ahora un proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ que llamaremos proceso de riesgo o *risk process* que modela la evolución temporal de las reservas de una compañia de seguros. Sabemos que $X_0 = x$, donde $x > 0$ representa la reserva inicial, y en este caso, estamos interesados en el cálculo de la probabilidad de ruina final determinada por

$$R(x) = P(\exists t \geq 0 \colon x + X_t \leq 0).$$

Una referencia en este tema es [10]

Paralelamente a la introducción de un modelo para el movimiento Browniano por Bachelier, casi simultaneamente, y en 1903 aparecia publicado el trabajo de Lundberg sobre Teoría del riesgo colectivo (*collective risk theory*), que propone la modelación para $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ mediante la ecuación

$$X_t = x + at - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

donde $x > 0$ es una constante positiva, a es una tasa relacionada con lo que obtiene la compañia por el cobro de seguros, $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de conteo, típicamente un proceso de Poisson, e $Y = \{Y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es la sucesión de los reclamos, por ejemplo, una sucesión de variables aleatorias independientes identicamente distribuidas. Supondremos que los procesos N e Y, las fuentes de incertidumbre de este modelo son independientes. El problema que se plantea entonces es el cálculo de probabilidades de ruina $R(x)$ para este tipo de procesos.

1.5 Procesos de Lévy

Los procesos de Lévy, o procesos de incrementos independientes y estacionarios son una familia que incluye al movimiento Browniano y a los procesos de riesgo antes descritos. $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy cuando

- X tiene trayectorias continuas a la derecha con límite a la izquierda
- $X_0 = 0$, y tiene incrementos independientes, es decir considerados los instantes $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, las variables aleatorias

  $$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

  son independientes.
- La distribución del incremento $X_t - X_s$ es homogénea en el tiempo, es decir, depende únicamente de la diferencia $t - s$.

Un resultado clave en la teoria de los procesos de Lévy, es la fórmula de Lévy-Kinchine, que calcula la función característica de las variables X_t como

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

donde la función ψ se llama *exponente característico*, y está dada por

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy)$$

con b y $\sigma \geq 0$ constantes reales, y Π una medida positiva en $\mathbf{R} - \{0\}$ tal que $\int(1 \wedge y^2)\Pi(dy) < +\infty$, que se denomina medida de Lévy. Es importante destacar, que la funcón ψ, que siempre esta definida para valores de z imaginarios puros, determina completamente la distribución de probabilidades del proceso. Tomando la notación de la teoría de las semimartingalas, identificaremos también cada distribución de un proceso de Lévy con una tripleta (b, σ, Π). Los procesos de Lévy son la clase menor de procesos, cerrada frente a la suma de procesos independientes, y los límites débiles, que contienen al movimiento Browniano de las finanzas, y a los procesos de Poisson compuestos de la matemática actuarial.

El modelo de la bolsa parisina, introducido por Bachelier es un proceso de Lévy con tripleta $(a, \sigma, 0)$. El proceso de riesgo con N de Poisson con parámetro λ, tiene tripleta $(a, 0, \lambda F(-dx))$, si $F(dx)$ denota la distribución de las variables de reclamo de Y.

Clase 2

Valuación de opciones europeas, americanas y perpetuas

Consideremos un modelo matemático de un mercado financiero como en la clase anterior, ahora con la modificación introducida por Samuelson [2]. El activo sin riesgo (bono) $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$, viene dado por

$$B_t = B_0 e^{rt},$$

y la evolución del segundo activo (activo con riesgo, *risky asset* o *stock*) es modelada a través de la exponencial de un movimiento Browniano con tendencia $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$, dado por

$$S_t = S_0 e^{at+\sigma W_t} = e^{x+at+\sigma W_t}$$

donde $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano, y notamos $S_0 = e^x$.

2.1 Opciones europeas. Black - Scholes 1973

La fórmula de Black y Scholes (1973) [4] da el precio *racional* o precio *justo* para las opciones europeas. Analicemos el caso de las opciones de compra, o *call options*. El principio para obtener este resutado es el de *cobertura perfecta o hedging*:

Es posible construir un portafolio en forma dinámica, constituido por β_t bonos y γ_t acciones que totalizan un capital en el instante t dado por $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$ tal que

1. Es un portafolio autofinanciante (*self-financing*)

   $$B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0.$$

   Esta condición significa que en el transcurso del tiempo, el portafolio varia únicamente por cambios en la proporción de bonos y acciones, y por la fluctuación del precio de estos activos, y no se introduce ni se extrae capital.

2. En $t = T$ el capital del portafolio coincide con el compromiso asumido por el lanzador de la opción, es decir

   $$X_T = \beta_T B_T + \gamma_T S_T = (S_T - K)^+$$

Basado en este principio, el precio se define como el capital inicial necesario para construir un portafolio que cumpla las propiedades anteriores, lo que trivializa la introducción de la opción europea en el modelo, ya que es equivalente a una posibilidad de inversión preexistente. El valor de la opción viene dado por la *Fórmula de Black y Scholes* que, notando $V(S_0, T)$ al precio de esta opción, establece

$$V(S_0, T) = S_0 \Phi(x_g) - K e^{-rT} \Phi(x_p)$$

con

$$x_g = \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$x_p = \frac{\ln(x/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria gaussiana.
Comentarios:

1. Dos herramientas de cálculo estocástico utilizadas en la obtención de esta fórmula son

- La fórmula de Itô, que expresa los diferenciales de funciones del movimiento Browniano,
- El teorema de Girsanov, que permite expresar la densidad de Radom-Nykodym entre dos medidas de probabilidad equivalentes en el espacio de trayectorias de los procesos estocásticos que estamos considerando.

2. Un resultado importante de este cálculo es que existe una *única* medida de probabilidad P^*, llamada medida *libre de riesgo* o *risk-neutral probability*, y que el precio de la opción se puede calcular como una esperanza matemática bajo esta medida,

$$V(S_0, T) = E^*[e^{-rT}(S_T - K)^+].$$

P^* esta caracterizada por la condición

$$\frac{S_t}{B_t} \text{ es una martingala bajo } P^*$$

Se dice también que el mercado es *completo*, y existe un resultado clave que establece que la posibilidad de construir una cobertura perfecta está relacionada con la unicidad de la medida que cumple la condición anterior. Por detalles, ver [11] o [12]

2.2 Opciones americanas, perpetuas, y parada óptima

Denotemos ahora por τ el tiempo de ejercicio de la opción que es elegido por el poseedor de la opción (*holder*), y cumple

$$0 \leq \tau \leq T.$$

Si $V_A(S_0, T)$ es el precio de una opción americana, tenemos que encontrar

- El *precio racional* de de la opción
- El *tiempo óptimo de ejercicio*, que notaremos τ^*, para esta opción.

Para obtener la solución de este problema, nos basamos en argumentos similares al caso europeo, es decir apelamos a construir una *cobertura perfecta* con la diferencia que en este caso debemos tener en cuenta no solamente el último instante T, y la propiedad de autofinanciación, sino que el capital de nuestro portafolio dinámico debe cumplir

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t \geq (S_t - K)^+ \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

El resultado de este planteo es que

$$V_A(S_0, T) = \sup_\tau E^*[e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+] = E^*[e^{-r\tau^*}(S_{\tau^*} - K)^+]$$

es decir, el precio de la opción americana está dado por la función de costo de un problema de parada óptima. Los detalles pueden verse en [13].

Un ejemplo importante que admite solución cerrada es el caso de una opción de compra americana (sobre una acción que no paga dividendos), cuyo precio resulta ser equivalente al de la opción europea, y el momento óptimo de ejercicio es $\tau^* = T$. Es un resultado de Merton de 1973, [3]. En el caso general, cuando los activos pagan dividendos, o se consideran opciones americanas de venta, las soluciones son calculadas basicamente mediante tres métodos

1. Cálculo numérico sobre una ecuación en derivadas parciales con frontera movil
$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}(x,t) + rxV_x(x,t) + V_t(x,t) = rV(x,t)$$
bajo la condición
$$V(x,T) \geq (K - x)^+.$$

2. Resolución del problema para paseos al azar, basados en la inducción hacia atrás de la programación dinámica.

3. Métodos montecarlo.

2.3 Una demstración elemental del Put perpetuo

Consideremos el caso perpetuo, es decir $T = \infty$. Las opciones perpetuas de compra, tienen ejercicio óptimo en $T = \infty$, y función de costo $V_A(S_0) =$

$V_A(S_0,\infty) = S_0$, como se puede ver tomando límite si $T \to \infty$, ver [6]. Para las opciones de compra, o *put options*, Mc Kean en 1965 [18], encontró la solución exacta del problema de parada óptima, mediante la solución de un problema de frontera libre para la ecuación del calor, del tipo descrito antes pero con $T = \infty$. Daremos una demostración elemental de este resultado sin utilizar cálculo estocástico, tomada de [14].

Teorema 1 *El precio de una opción de compra perpetua en el modelo de Black Scholes viene dado por*

$$V_A(S_0) = \begin{cases} CS_0^{-\alpha} & si \quad S_0 > S_0^* \\ K - S_0 & si \quad 0 \leq S_0 \leq S_0^* \end{cases}$$

donde

$$\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}, \qquad C = \alpha^\alpha \Big(\frac{K}{1+\alpha}\Big)^{1+\alpha}, \qquad S_0^* = \frac{\alpha K}{1+\alpha}.$$

El ejercicio óptimo está dado por el tiempo de parada

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \leq S_0^*\}$$

Demostración. Para demostrar que la pareja formada la función $V_A(S_0)$ y el tiempo τ^* son la solución del problema de parada óptima, verificamos las dos siguientes propiedades:

(A) $V_A(S_0) = E(e^{-r\tau^*}(K - S_{\tau^*})^+)$,

(B) $V_A(S_0) \geq E(e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+)$, para cualquier tiempo de parada τ

Notemos $w = w(y), y \geq 0$, la función definida mediante $w(y) = Cy^{-\alpha}$. Veamos que $\{e^{-rt}w(S_t)\}$ es una martingala. En efecto, si $h > 0$

$$E(e^{-r(t+h)}S_{t+h}^{-\alpha} - e^{-rt}S_t^{-\alpha}|F_t) = e^{-rt}S_t^{-\alpha}\Big[Ee^{-rh-\alpha\sigma W_h - \alpha(r-\frac{\sigma^2}{2})h} - 1\Big] =$$

$$e^{-rt}S_t^{-\alpha}\Big[\exp(-[r + \alpha^2\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(r - \frac{\sigma^2}{2})]h) - 1\Big] = 0$$

por la elección de α.

Si $S_0 > S^*$

$$Ee^{-r\tau^*}(K - S_{\tau^*})^+ = Ee^{-r\tau^*}(K - S_{\tau^*})^+\mathbf{1}_{\{\tau^*<\infty\}} = CEe^{-r\tau^*}S_{\tau^*}^{-\alpha}\mathbf{1}_{\{\tau^*<\infty\}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} Ee^{-r(\tau^*\wedge t)} w(S_{(\tau^*\wedge t)}) = CS_0^{-\alpha}.$$

por argumentos estandar para pasar al límite. Si $S_0 < S^*$, $\tau^* = 0$ y $Ee^{-r\tau^*}(K - S_{\tau^*})^+ = K - S_0$, concluyendo (A).

Para verificar (B) consideremos la función auxiliar $\phi = \phi(y), y \geq 0$ dada por

$$\phi(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y < S^* - K, \\ \\ K - \left(\frac{y}{B}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, & S^* - K < y. \end{cases}$$

Valen las siguientes propiedades,

- $\phi(w(y)) = V_A(y)$
- ϕ es cóncava
- $\phi(ky) \leq k\phi(y)$ para $k \geq 1$.

Veamos que, $\{e^{-rt}V_A(S_t)\}_{t\geq 0}$ es una supermartingala. Para $h > 0$

$$E(e^{-r(t+h)}V_A(S_{t+h})|F_t) = e^{-r(t+h)}E(\phi(w(S_{t+h}))|\mathcal{F}_t)$$

$$\leq e^{-r(t+h)}\phi(E(w(S_{t+h})|\mathcal{F}_t)) = e^{-r(t+h)}\phi(e^{rh}w(S_t)) \leq$$

$$e^{-rt}\phi(w(S_t)) = e^{-rt}V_A(S_t).$$

Entonces, si τ es un tiempo de parada

$$Ee^{-r\tau}(K - S_\tau)^+ = E\lim_{t\to\infty} e^{-r(\tau\wedge t)}(K - S_{\tau\wedge t})^+$$

$$\leq \liminf_{t\to\infty} Ee^{-r(\tau\wedge t)}(K - S_{\tau\wedge t})^+$$

$$\leq \liminf_{t\to\infty} Ee^{-r(\tau\wedge t)}V_A(S_{\tau\wedge t}) \leq V_A(S_0)$$

verificando (B) y completando la prueba.

Clase 3

Probabilidades de ruina y opciones perpetuas para procesos de Lévy

En esta clase exponemos en primer lugar un resultado que da probabilidades de ruina exactas para procesos de Lévy, cuando los saltos positivos son arbitrarios y los negativos están distribuidos de acuerdo a una mezcla de exponenciales, similar al caso de los paseos al azar. En segundo lugar, damos precios para opciones perpetuas cuando el activo con riesgo tiene como fuente de incertidumbre un proceso de Lévy. Tanto las funciones de costo como los tiempos óptimos se expresan en función de la distribución del máximo del proceso de Lévy, detenido en un instante aleatorio exponencial e independiente del proceso, en el caso de que el stock pague dividendos. Como la distribución del máximo, es la probabilidad de ruina del proceso dual o inverso, obtenemos que los precios de opciones se podrán calcular, una vez conocidas estas probabilidades de ruina. Los resultados aqui presentados fueron obtenidos en [15] y [6].

3.1 Ruina para procesos de Lévy con saltos negativos mezcla de exponenciales y positivos arbitrarios

Consideremos entonces un proceso de Lévy $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$, con tripleta dada por (b, σ, Π) y exponente característico ψ dado por

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy)$$

Consideramos las variables auxiliares M e I dadas por

$$M = \sup_{0\leq t<\tau(\gamma)} X_t \quad \text{y} \quad I = \inf_{0\leq t<\tau(\gamma)} X_t,$$

donde $\tau(\gamma)$ es una variable exponencial independiente de X con parámetro γ, si $\gamma > 0$ y $\tau(\gamma) = \infty$ si $\gamma = 0$. M e I representan el máximo y mínimo del proceso en caso $\gamma = 0$, respectivamente, y si $\gamma > 0$, se dice que estan detenidos con una tasa γ (*killed at rate* γ). Por último, el conocimiento de la probabilidad de ruina para el proceso $\{x - X_t\}$ para todo $x \geq 0$ es equivalente a conocer la distribución de M, por lo que centraremos la atención en la distribución de las variables M e I.

Teorema 2 *(a) Sea X un proceso de Lévy con $\sigma > 0$, y medida de saltos dada por*

$$\Pi(y) = \begin{cases} \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k e^{-\alpha_k y}, & y > 0, \\ \\ \pi(dy) & y < 0, \end{cases}$$

donde $\pi(dy)$ es una medida de saltos arbitraria, es decir, X tiene saltos positivos distribuidos de acuerdo a una mezcla de exponenciales. ψ denota la continuación analítica al conjunto $\{\Re(z) \geq 0, z \neq \alpha_k, k = 1, \ldots, n\}$ del exponente característico. Entonces, la variable M, cuando es propia tiene una densidad dada por

$$f_M(y) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k p_k e^{-p_k y}, \quad y > 0,$$

donde $p_1, \ldots, p_{n+1}$, que cumplen

$$0 < p_1 < \alpha_1 < p_2 < \ldots < \alpha_n < p_{n+1}$$

son las raices reales y positivas de la ecuación $\psi(p) = \gamma$ y los coeficientes vienen dados por

$$A_j = \frac{\prod_{k=1}^{n}(\frac{p_j}{\alpha_k} - 1)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}(\frac{p_j}{p_k} - 1)}, \qquad j = 1, \ldots, n+1.$$

(b) Sea ahora X un proceso de Lévy con $\sigma > 0$, y

$$\Pi(y) = \begin{cases} \pi(dy) & y > 0, \\ & \\ \mu \sum_{k=1}^{n} b_k \beta_k e^{\beta_k y} dy & y < 0, \end{cases}$$

$\pi(dy)$ arbitraria. ψ es ahora la continuación analítica a $\{\Re(z) \leq 0, z \neq -\beta_k, k = 1, \ldots, n\}$ del exponente característico. Entonces I, tiene densidad

$$f_I(y) = \sum_{k=1}^{n+1} B_k q_k e^{-q_k y}, \quad y < 0,$$

donde ahora $-q_{n+1} < -q_n < \ldots < -q_1 < 0$ son las raíces reales y negativas de la ecuación $\psi(p) = \gamma$, y los coeficientes vienen dados por

$$B_j = \frac{\prod_{k=1}^{n}(\frac{q_j}{\beta_k} - 1)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}(\frac{q_j}{q_k} - 1)}, \qquad j = 1, \ldots, n+1,$$

3.2 Valuación de opciones perpetuas para un proceso de Lévy

Consideremos un modelo con $S_t = S_0 e^{X_t}$ y $\delta > 0$. Daremos la solución del problema de parada óptima

$$V_C(S_0) = \sup_{\tau \geq 0} E(e^{-(r+\delta)\tau}(S_\tau - K)^+).$$

que corresponde a la valaución de opciones perpetuas de compra con dividendos. Recordamos que el caso sin dividendos es trivial.

Teorema 3 (Call perpetuo con dividendos) *Sea*

$$M = \sup_{0 \leq t < \tau(r+\delta)} X_t$$

con $\tau(r+\delta)$ una variable exponencial con parámetro $r+\delta$, e independiente de X. Entonces $E(e^M) < \infty$, la función de costo del problema de parada óptima es

$$V_C(S_0) = \frac{E[S_0 e^M - KE(e^M)]^+}{E(e^M)},$$

y el tiempo óptimo de parada

$$\tau_c^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \geq S_c^*\},$$

con $S_c^* = KE(e^M)$.

Nota: Este teorema es una generalización directa del correspondiente para paseos al azar, en Darling, Ligget y Taylor (1972) [16].

Consideremos el caso de una opción de venta. Sea ahora la tasa de dividendos $\delta \geq 0$, y consideremos el problema

$$V_P(S_0) = \sup_{\tau \geq 0} E(e^{-(r+\delta)\tau}(K - S_\tau)^+).$$

Teorema 4 (Put perpetuo con dividendos) *Notemos*

$$I = \inf_{0 \leq t < \tau(r+\delta)} X_t$$

con $\tau(\delta + r)$ como en el Teorema anterior. Luego $E(e^I) > 0$ y

$$V_P(S_0) = \frac{E[KE(e^I) - S_0 e^I]^+}{E(e^I)}.$$

El tiempo de parada óptimo es

$$\tau_p^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \leq S_p^*\},$$

donde $S_p^* = KE(e^I)$.

El siguiente corolario es de interés por la similitud de las fuciones de costo para opciones perpetuas americanas y la fórmula de Black y Scholes

Corolario 1 (Fórmula B-S) *(a) Si* $\delta > 0$

$$V_C(S_0) = S_0 \tilde{P}(S_0 e^M \geq S_c^*) - KP(S_0 e^M \geq S_c^*),$$

donde $\tilde{P}$ *es la medida definida por*

$$d\tilde{P} = \frac{e^M}{E(e^M)} dP.$$

(b) Si $\delta \geq 0$,

$$V_P(S_0) = KP(S_0 e^I \leq S_p^*)) - S_0 \tilde{P}(S_0 e^I \leq S_p^*)),$$

donde $\tilde{P}$

$$d\tilde{P} = \frac{e^I}{E^*(e^I)} dP.$$

3.3 Fórmulas cerradas para saltos exponenciales

La combinación de los resultados anteriores, es decir, la sustitución de las densidades del máximo y mínimo del proceso de Lévy en los resultados anteriores produce las siguientes fórmulas cerradas.

Teorema 5 (Call perpetuo) *Sea* X *un proceso de Lévy con saltos positivos mezcla de exponenciales. Para* $\delta > 0$, *sea*

$$S_c^* = K \sum_{k=1}^{n+1} A_k \frac{p_k}{p_k - 1},$$

con $0 < p_1 < \ldots < p_{n+1}$ *las raices positivas de* $\psi(p) = r + \delta$, *y los coeficientes* $A_1, \ldots, A_{n+1}$ *como antes. El precio de un call perpetuo es*

$$V_c(S_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k}{p_k - 1} \left(\frac{S_0}{S_c^*} \right)^{p_k} & S_0 \leq S_c^*, \\ \\ S_0 - K & S_0 > S_c^*. \end{cases}$$

El ejercicio óptimo viene dado por

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \geq S_c^*\}.$$

Comentarios:

- Si $\Pi = 0$, es decir, tenemos el modelo de Black y Scholes sin saltos se obtiene en este Teorema el resultado de Merton de 1973, [3]
- Si los saltos positivos son exponenciales con densidad $h(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ y los negativos nulos, es decir $\pi = 0$ se obtienen los resultados en [17].

Teorema 6 (Put perpetuo) *Sea X un proceso de Lévy con saltos negativos distribuidos de acuerdo a una mezcla de exponenciales. Notemos, para $\delta \geq 0$,*

$$S_p^* = K \sum_{k=1}^{n+1} B_k \frac{q_k}{q_k + 1},$$

donde $-q_1, \dots, -q_{n+1}$, son las raices negativas de $\psi(p) = r + \delta$, y los coeficientes $B_1, \dots, B_{n+1}$ son como antes. El precio del put perpetuo es

$$V_P(S_0) = \begin{cases} K - S_0 & S_0 \leq S_p^*, \\ \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_k}{q_k+1} \left(\frac{S_0}{S_p^*}\right)^{q_k} & S_0 > S_p^*. \end{cases}$$

El ejercicio óptimo viene dado por

$$\tau_p^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \leq S_p^*\}.$$

Comentarios:

- Si $\Pi = 0$, es decir, consideramos el modelo B-S sin saltos, se obtiene el resultado de Mc Kean de 1965, [18].
- Si $h(x) = 0$ y $\pi = \lambda F$, F una distribución de probabilidad, obtenemos el resultado de X.L. Zhang de 1995, [19].
- Si el proceso de Lévy viene dado por $X_t = at + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ con $\{Y_i\}$ v.a.i.i.d. con distribuciones mezcla de exponenciales a ambos lados, podemos obtener fórmulas cerradas para opciones perpetuas call y put en forma simultánea. Parece ser un modelo lo suficientemente general para modelar datos empíricos con saltos "grandes" y suficientemente parsimonioso para obtener fórmulas cerradas.

Bibliografía

[1] Bachelier L. Théorie de la spéculation. Ann. Ecole Norm. Sup., 1900, v. 17, pp 21–86. (Reprinted in: The random character of stock market prices. Ed. by P.H. Cootner Cambridge, Massachusetts: MIT Preess, 1967. pp. 17–78.)

[2] Samuelson, P.A. Rational Theory of Warrant Pricing. Industrial Management Reviews. **6** 13–32 (1965)

[3] Merton, R.C.: Theory of rational option pricing, Bell J. Econom. Manag. Sci. **4**, 141–183 (1973)

[4] Black, R. Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy **81**, 637–659 (1973)

[5] Lundberg F. **I** Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen. **II** øAterförsäkring av Kollektivrisker. Alqvimist & Wiksell, Uppsala. (1903)

[6] Mordecki E. (2000) Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes. Prepublicaciones Matemáticas del Uruguay 2000/35. Submitted. (http://www.cmat.edu.uy/˜mordecki).

[7] Jacod, J. and Shiryaev, A.N., (1987) *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer, Berlin, Heidelberg.

[8] Embrechts, Paul; Klppelberg, Claudia; Mikosch, Thomas. Modelling extremal events. For insurance and finance. Applications of Mathematics, 33. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] Courtault, J.M., Kabanov, Y., Bru, B., Crépel, P. Lebon, I., Le Marchand, A. *Louis Bachelier on the centenary of Théorie de la spéculation.* Mathematical Finance, **10**, 3, July 2000, 341 – 353.

[10] Asmussen, S. *Ruin Probabilities.* 2000 Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. World Scientific. Singapore.

[11] Karatzas, I., Shreve, S.E.: *Methods of Mathematical Finance*. New York Berlin Heidelberg: Springer 1998

[12] Shiryaev, A. N. *Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory.* Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, 3. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

[13] Shiryaev, A.N., Kabanov, Y. M., Kramkov, D.O., Melnikov, A.V.: On the pricing of options of European and American types, II. Continuous time. Theory of Probability and Applications **39**, 80–129 (1994)

[14] Mordecki, E. (2000) Elementary Proofs on Optimal Stopping. En preparación.

[15] Mordecki E. (1999) Ruin probabilities for a Lévy process with mixed exponential negative jumps. Prepublicaciones Matemáticas del Uruguay, 99/28. Submitted. (http://www.cmat.edu.uy/˜mordecki).

[16] Darling, D.A., Ligget, T. Taylor, H.M. (1972). Optimal stopping for partial sums. *The Annals of Mathematical Statistics*, **43** 1363–1368.

[17] Mordecki, E.: Optimal stopping for a diffusion with jumps. Finance & Stochastics **3** (2) 227–236 (1999)

[18] Mc Kean, Jr. H.P.: "Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in Mathematical Economics". Industrial Management Review **6**, (spring) 32–39 (1965).

[19] Zhang, X.L.: Formules quasi-explicites pour les options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. Mathematics and Computers in Simulation **38**, 151–161 (1995).