Probabilidad

Ernesto Mordecki

26 de febrero de 2004

1. Experimentos aleatorios

Las probabilidades aparecen asociadas a los fenómenos aleatorios. Un *fenómeno aleatorio* es aquel en el cual la verificación de un cierto conjunto de condiciones determinadas conduce a un resultado entre una serie de resultados posibles. Llamamos *experimento aleatorio* a ese conjunto de condiciones determinadas. Por contraposición, los *fenómenos determísticos*, o no aleatorios son aquellos en los que la verificación de un cierto conjunto de condiciones determinadas conduce, en forma inevitable, a un resultado fijo. Como ejemplos: tirar una moneda al aire y observar la cara que presenta al caer al piso es un experimento aleatorio (tenemos dos resultados posibles: cara y número); mientras que enfriar agua hasta cero grados centígrados bajo presion atmosférica normal es un fenómeno determinístico (conduce inequívocamente a la formación de hielo).

2. Sucesos

Consideremos un experimento aleatorio, y designemos mediante la letra griega mayúscula Ω (Omega) el conjunto de todos sus resultados posibles. Llamamos a este conjunto Ω *espacio de sucesos elementales*, y a sus puntos *sucesos elementales* o también *casos posibles*. Suponemos que Ω es un conjunto finito y utilizamos la letra n para designar su cantidad de elementos.

Ejemplo 1. Si tiramos una moneda al aire, tenemos un experimento aleatorio con

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{número}\},$$

y resulta $n = 2$.

Ejemplo 2. Si tiramos un dado, tenemos seis resultados posibles,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y en este caso $n = 6$.

Ejemplo 3. Si lanzamos un dado dos veces consecutivas, tenemos 36 casos posibles, resultantes de combinar el primer resultado con el segundo, que podemos representar en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

donde, por ejemplo, el caso $(3,4)$ representa el resultado correspondiente a obtener 3 puntos en la primer tirada y 4 en la segunda.

Llamamos *suceso* a cada subconjunto de Ω. Designamos a los sucesos mediante las letras $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ con subíndices o sin ellos. Los sucesos pueden tener uno o varios elementos, y también ningún elemento. En este último caso tenemos el *suceso imposible*, que designamos mediante $\emptyset$. En el ejemplo 3, el conjunto

$$\mathbf{A} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$$

es un suceso, y corresponde a obtener un as en la primer tirada del dado.

Los puntos que componen un suceso se llaman *casos favorables* para la ocurrencia de dicho suceso.

El surgimiento de la teoría de la probabilidad es muy anterior a la creación de la teoría de conjuntos. Por esto, desde su mismo inicio, en teoría de la probabilidad se utilizó (y continúa utilizándose) una terminología específica, diferente de la terminología utilizada en teoría de conjuntos. En la página 3 se presenta una tabla de términos de teoría de conjuntos, junto con los correspondientes términos del cálculo de probabilidades, que introducimos y utilizamos a lo largo de este curso. Las letras $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$, con índices o sin ellos, designan a los sucesos, es decir, a los subconjuntos de Ω.

3. Probabilidad

Definición 1. *Dado un experimento aleatorio con un espacio de n sucesos elementales Ω, la probabilidad del suceso $\mathbf{A}$, que designamos mediante $\mathbf{P}(\mathbf{A})$, es la razón entre la cantidad de casos favorables para la ocurrencia de $\mathbf{A}$ y*

Notación	*Término de la teoría de conjuntos*	*Término de la teoría de la probabilidad*
Ω	espacio de elementos	espacio de sucesos elementales
$\emptyset$	conjunto vacío	suceso imposible
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	unión de los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$	suma de los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$	intersección de los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$	producto de los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$
$\mathbf{AB} = \emptyset$	los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son disjuntos (no tienen elementos comunes)	los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son incompatibles
$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$	el conjunto $\mathbf{C}$ es la intersección de los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$	el suceso $\mathbf{C}$ consiste en la ocurrencia (simultánea) de ambos sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$
$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	el conjunto $\mathbf{D}$ es la unión de los conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$	el suceso $\mathbf{D}$ consiste en la ocurrencia de al menos uno de los sucesos $\mathbf{A}$ ó $\mathbf{B}$
$\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \emptyset$ $(i, j = 1, 2, \dots;$ $i \neq j)$	los conjuntos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots$ son disjuntos dos a dos	los sucesos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots$ son incompatibles dos a dos
$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i = \Omega$	cada punto del espacio Ω pertenece por lo menos a uno de los conjuntos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$	los sucesos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ son los únicos posibles
$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$	el conjunto $\mathbf{A}$ está contenido en el conjunto $\mathbf{B}$	la ocurrencia del suceso $\mathbf{A}$ implica la ocurrencia del suceso $\mathbf{B}$
$\Omega \setminus \mathbf{A}$	complemento del conjunto $\mathbf{A}$ (designado $\mathbf{A}^c$)	suceso contrario al suceso $\mathbf{A}$ (designado $\bar{\mathbf{A}}$)

la de casos posibles. En otros términos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{n_{\mathbf{A}}}{n},$$

donde $n_{\mathbf{A}}$ *es la cantidad de casos favorables de* $\mathbf{A}$.

Veamos tres observaciones que resultan de esta definición.

Observación. De la definición dada se obtiene que cada suceso elemental tiene probabilidad $1/n$. Decimos en este caso que los sucesos son *equiprobables*. Esta es una característica muy importante de la definición, que establece limitaciones en su aplicación en aquellos experimentos aleatorios donde este supuesto sea razonable.

Observación. La probabilidad es un número no negativo, y menor o igual que 1, es decir, para cualquier suceso $\mathbf{A}$ tenemos

$$0 \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq 1.$$

Observación. Como el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de Ω sin elementos, tenemos que su probabilidad es nula, es decir $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$. Es por ésto que lo llamamos *suceso imposible*. (Ver tabla en la página 2.)

Por otra parte obtenemos que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, por lo que llamamos *suceso seguro* al espacio de sucesos elementales Ω.

Ejemplo 4. Calcular la probabilidad de que al tirar un dado dos veces consecutivas, la suma de los puntos obtenidos sea no menor que 8.

Solución. Designemos por (i, j) al resultado del experimento consistente en tirar un dado dos veces consecutivas, y obtener i puntos en el primer tiro y j puntos en el segundo $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. El conjunto de sucesos elementales que describe los resultados de un experimento de este tipo, se compone de $6 \times 6 = 36$ puntos de la forma (i, j), y puede ser representado en la siguiente tabla:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(2,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

El suceso $\mathbf{A}$ consiste en que la suma de los puntos obtenidos es no menor que 8. Es claro, que los casos favorables para la ocurrencia del suceso $\mathbf{A}$ son los son indicados en la tabla. La cantidad de estos sucesos es 15. Considerando que los 36 resultados posibles son equiprobables, y aplicando la definición de probabilidad, obtenemos $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 15/36 = 5/12$.

4. Probabilidad y Permutaciones

En vista de la definición que dimos de probabilidad, basada en las cantidades de casos favorables y de casos posibles, la determinación de la probabilidad de un suceso se reduce en muchos casos a problemas de combinatoria, en particular al cálculo de *permutaciones*.

Podemos[1] disponer dos letras distintas A, B una luego de la otra de dos formas distintas:

$$\text{AB}, \qquad \text{BA}.$$

Tres letras se pueden disponer en forma sucesiva ya de seis maneras:

$$\begin{array}{ll} \text{ABC}, & \text{ACB} \\ \text{BAC}, & \text{BCA} \\ \text{CAB}, & \text{CBA} \end{array}$$

Para cuatro letras obtenemos 24 formas diferentes de disponerlas sucesivamente:

$$\begin{array}{llllll} \text{ABCD}, & \text{ABDC}, & \text{ACBD}, & \text{ACDB}, & \text{ADBC}, & \text{ADCB} \\ \text{BACD}, & \text{BADC}, & \text{BCAD}, & \text{BCDA}, & \text{BDAC}, & \text{BDCA} \\ \text{CABD}, & \text{CADB}, & \text{CBAD}, & \text{CBDA}, & \text{CDAB}, & \text{CDBA} \\ \text{DABC}, & \text{DACB}, & \text{DBAC}, & \text{DBCA}, & \text{DCAB}, & \text{DCBA} \end{array}$$

¿De cuantas formas se pueden disponer diez letras en forma sucesiva? Escribir todas las formas parece difícil. Para responder esta pregunta es desable tener una regla general, una fórmula, que nos permita calcular directamente la cantidad de formas distintas de disponer n letras en forma sucesiva. Esta cantidad se designa mediante el símbolo $n!$ (la letra n seguida de un símbolo de exclamación) y se llama el *factorial de* n, o, más brevemente, n*-factorial.* Calculemos esta cantidad. Hemos visto, que

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24.$$

Llamamos *permutación* a cada forma de disponer una cantidad dada de letras en forma sucesiva. Es claro que en vez de letras podemos disponer cifras, o cualquier otro elemento. La cantidad de permutaciones de 4 elementos es 24. En general, la cantidad de permutaciones de n elementos es $n!$. Supondremos también que

$$1! = 1.$$

[1] Tomado de "Introducción a la Teoría de Probabilidades" de A.N. Kolmogorov, I.G. Zhurbenko, A. V. Projorov, Biblioteca "KBANT" No. 23, Ed. Nauka, Moscú 1982.

(un solo objeto no se puede “permutar”, hay una única forma de ponerlo en una sucesión).

Tenemos entonces:

$$
\begin{aligned}
1! &= 1,\\
2! &= 1 \times 2 = 2,\\
3! &= 1 \times 2 \times 3 = 6,\\
4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.
\end{aligned}
$$

Se plantea el siguiente resultado: la cantidad de permutaciones de n elementos es igual al producto de los n primeros números naturales.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n. \tag{1}$$

Este resultado es cierto.

Para su demostración observemos que en caso de tener n elementos, en el primer lugar podemos colocar cualquiera de ellos. En cada uno de estas n situaciones restan $n-1$ elementos para disponer en $n-1$ lugares, lo que se puede hacer en $(n-1)!$ formas diferentes. Obtenemos entonces $n \times (n-1)!$ formas distintas de disponer n elementos:

$$n! = (n-1)! \times n. \tag{2}$$

Con ayuda de la fórmula (2) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
2! &= 1! \times 2 = 1 \times 2,\\
3! &= 2! \times 3 = 1 \times 2 \times 3,\\
4! &= 3! \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4\\
5! &= 4! \times 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120,
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

En términos más formales, la demostración se basa en el principio de inducción completa, el cual permite obtener la fórmula (1) a partir de la (2).

Ahora no es difícil calcular la cantidad de permutaciones de diez letras:

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3\,628\,800.$$

Ejemplo 5. Calculemos la probablidad de que al disponer al azar las letras A, D, E, M, N, O, resulte exactamente la palabra MONEDA. Comencemos con los casos favorables: tenemos 6 letras, que se pueden disponer de $6! = 120 \times 6 = 720$ formas diferentes. Como existe un único caso favorable, la probabilidad buscada es $1/720$.

Ejemplo 6. Calculemos la probablidad de que al disponer al azar las letras A, A, A, N, N, resulte la palabra ANANA, Comencemos con los casos favorables: tenemos 5 letras, que se pueden disponer de $5! = 120$ formas diferentes. Como hay letras repetidas el conteo de los casos favorables es más delicado. Para eso etiquetamos cada letra con un número:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \mathrm{A} & \mathrm{N} & \mathrm{A} & \mathrm{N} & \mathrm{A} \end{array}$$

Tenemos dos posibilidades para las N, que corresponden a las formas de disponer los números 2 y 4. Tenemos 6 posibilidades para las A, que son las formas de disponer los números 1,3,5. Cada una de las formas de disponer las N se combina con cada una de las formas de disponer las A, obteniendo 12 casos favorables. La probabilidad buscada es entonces 12/120=1/10.

5. Operaciones con sucesos

Llamamos *suma* o *unión* de los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ al suceso compuesto tanto por los sucesos elementales que componen $\mathbf{A}$ como por los que componen $\mathbf{B}$. Los sucesos elementales que componen tanto $\mathbf{A}$ como $\mathbf{B}$ se cuentan una sola vez. Designamos mediante $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ a la suma de los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Ejemplo 7. Tiremos un dado, y designemos mediante $\mathbf{A}$ el suceso de obtener una cantidad par de puntos; mediante $\mathbf{B}$, una cantidad múltipo de tres. El suceso $\mathbf{A} = \{2, 4, 6\}$, mientras que $\mathbf{B} = \{3, 6\}$. Por eso

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{2, 3, 4, 6\}.$$

El resultado 6 aparece en ambos sucesos. Observemos que el suceso $\mathbf{B}$ se puede obtener como la suma de los sucesos $\{3\}$ y $\{6\}$.

La definición de suma de sucesos puede extenderse de forma natural a una cantidad arbitraria de sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{K}$. La suma de los suceso anteriores, que designamos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \cdots \cup \mathbf{K}$, es el suceso compuesto por todos aquellos sucesos elementales que componen por lo menos uno de los sucesos elementales dados $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{K}$. De esta forma, el suceso $\mathbf{A}$ en el ejemplo anterior del dado se puede obtener como unión de tres sucesos: $\mathbf{A} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$.

Llamamos *producto* o *intersección* de dos sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ al suceso compuesto por los sucesos elementales que componen tanto el suceso $\mathbf{A}$ como el suceso $\mathbf{B}$. Designamos mediante $\mathbf{AB}$ o también mediante $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ a la intersección de los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

En el ejemplo anterior, correspondiente a tirar un dado, la intersección de los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se compone de un único suceso elemental, el $\{6\}$, es decir $\mathbf{AB} = \{6\}$.

La definición de intersección de sucesos puede extenderse de forma natural a una cantidad arbitraria de sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{K}$. La intersección de los sucesos anteriores, que designamos $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \cdots \cap \mathbf{K}$, es el suceso compuesto por todos aquellos sucesos elementales que componen, simúltaneamente, cada uno de los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{K}$.

El suceso *contrario* a un suceso $\mathbf{A}$, o su *complemento*, que designamos $\bar{\mathbf{A}}$, es el suceso compuesto por todos los sucesos elementales que no componen $\mathbf{A}$. En el ejemplo de tirar el dado, tenemos $\bar{\mathbf{A}} = \{1, 3, 5\}$.

6. Regla de la suma

Decimos que dos sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *incompatibles* cuando no tienen puntos en común, es decir, su intersección es vacía: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.

Teorema 1 (Regla de la suma). *La probablidad de la suma de dos sucesos incompatibles* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *es la suma de sus probabilidades, es decir*

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}). \tag{3}$$

Demostración. Designemos mediante $n_{\mathbf{A}}$ y $n_{\mathbf{B}}$ a la cantidad de elementos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, respectivamente. Como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no tienen puntos en común, su unión $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ tiene $n_{\mathbf{A}} + n_{\mathbf{B}}$ puntos, que son los casos favorables para $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Entonces

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \frac{n_{\mathbf{A}} + n_{\mathbf{B}}}{n} = \frac{n_{\mathbf{A}}}{n} + \frac{n_{\mathbf{B}}}{n} = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}).$$

donde la última igualdad se obtiene también por la definición de probabilidad. □

Decimos que los sucesos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ son *incompatibles dos a dos* cuando todas las parejas poisibles de sucesos distintos son incompatibles, es decir, cuando $\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \emptyset$.

Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son tres sucesos incompatibles no es difícil establecer, teniendo en cuenta el teorema anterior, que

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{C}).$$

Más en general, si $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ son sucesos incompatibles dos a dos, la regla de la suma es la fórmula

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) + \cdots + \mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_k).$$

Esta fórmula incluye a las dos anteriores en los casos en que $n = 2$ y $n = 3$, y se demuestra mediante la aplicación sucesiva de la fórmula (3).

7. Propiedades de la probabilidad

La definición de probabilidad junto a la regla de la suma permiten obtener importantes propiedades para el cálculo de probabilidades.

Propiedad 1. *Para cualquier suceso* $\mathbf{A}$ *se tiene* $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

Demostración. Por definición de $\bar{\mathbf{A}}$ (suceso contrario al suceso $\mathbf{A}$), tenemos $\bar{\mathbf{A}} = \Omega \setminus \mathbf{A}$. De aquí resulta $\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \emptyset$.

Como $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, aplicando la regla de la suma concluímos que $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}})$. □

Propiedad 2. *Si* $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, *entonces* $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B})$.

Demostración. Como $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, tenemos $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})$. Los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}$ son incompatibles, y por la regla de la suma $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}) \geq \mathbf{P}(\mathbf{A})$. □

Propiedad 3. *Para sucesos* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *arbitrarios vale la igualdad*

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}). \tag{4}$$

Demostración. Es claro que $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B} \cup \mathbf{A}\bar{\mathbf{B}}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B} \cup \bar{\mathbf{A}}\mathbf{B}$. Como los sucesos en las dos sumas anteriores son incompatibles, aplicando la regla de la suma, resulta

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}}), \qquad \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{B}).$$

Tenemos también $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B} \cup \mathbf{A}\bar{\mathbf{B}} \cup \bar{\mathbf{A}}\mathbf{B}$, donde a la derecha se suman tres sucesos incompatibles dos a dos. Aplicando nuevamente la regla de la suma y sustituyendo, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}),\end{aligned}$$

que es la igualdad buscada. □

Observación. Si los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son incompatibles, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = 0$, y de la fórmula (4) se obtiene la igualdad ya conocida $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$.

Observación. En forma análoga, no es difícil demostrar, que para tres sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ arbitrarios, tiene lugar la igualdad

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) &+ \mathbf{P}(\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{C}) \\ &- \mathbf{P}(\mathbf{AB}) - \mathbf{P}(\mathbf{AC}) - \mathbf{P}(\mathbf{BC}) + \mathbf{P}(\mathbf{ABC}).\end{aligned}$$

Es posible también demostrar una fórmula general: para sucesos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ arbitrarios, vale la igualdad

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{A}_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{A}_i) &- \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k) \\ &- \cdots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_n).\end{aligned}$$

De aquí es posible obtener la *desigualdad de Bonferroni*:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{A}_i\Big) \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{A}_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j).$$

Propiedad 4. *Dados n sucesos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ arbitrarios, tiene lugar la desigualdad*

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{A}_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{A}_i).$$

Demostración. Para $n = 2$ esta desigualdad se obtiene de (4). Para $n > 2$, es fácil obtener el resultado anterior, mediante la aplicación sucesiva de la desigualdad $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$. □

Propiedad 5. *Sean $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ sucesos incompatibles dos a dos, y los únicos posibles*[2]*. Entonces $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{A}_i) = 1$.*

Demostración. Tenemos $\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$, para $i, j = 1, \dots, n$. Además $\bigcup_{i=1}^n \mathbf{A}_i = \Omega$. Como $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, aplicando la regla de la suma obtenemos

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{A}_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{A}_i),$$

concluyendo la demostración. □

[2]Ver tabla en la página 3.

8. Probabilidad condicional. Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes.

Consideremos un espacio de sucesos elementales Ω y dos sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Supongamos que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) > 0$. Definimos la *probabilidad condicional* de $\mathbf{B}$ dado $\mathbf{A}$, que designamos $\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A})$, mediante la fórmula

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{AB})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}. \tag{5}$$

La probabilidad condicional es la probabilidad restringida al suceso $\mathbf{A}$. En primer lugar es inmediato obtener que $\mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{A}) = 1$. Veamos además que se verifica la regla de la suma para la probabilidad condicional, es decir:

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \cup \mathbf{C} \mid \mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{C} \mid \mathbf{A}), \tag{6}$$

si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son sucesos incompatibles.

En efecto, aplicando la regla de la suma en la igualdad

$$(\mathbf{B} \cup \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} \cup \mathbf{CA},$$

que esta formada por sucesos incomaptibles por serlo $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, tenemos

$$\mathbf{P}\big((\mathbf{B} \cup \mathbf{C})\mathbf{A}\big) = \mathbf{P}(\mathbf{BA}) + \mathbf{P}(\mathbf{CA}),$$

lo que dividido por $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ da (6), el resultado buscado.

Consideremos ahora que Ω está compuesto por n puntos, a los cuales se les asignan probabilidades idénticas. Para un suceso $\mathbf{C}$ arbitrario, designamos mediante $n_{\mathbf{C}}$ la cantidad de sucesos elementales que componen $\mathbf{C}$. Entonces $\mathbf{P}(\mathbf{C}) = n_{\mathbf{C}}/n$, y para la probabilidad condicional tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{AB})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})} = \frac{n_{\mathbf{AB}}/n}{n_{\mathbf{A}}/n} = \frac{n_{\mathbf{AB}}}{n_{\mathbf{A}}}.$$

Ejemplo 8. Un experimento consiste en elegir al azar una carta de un mazo de 52 cartas. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en que la carta elegida sea roja; el suceso $\mathbf{B}$, en que sea de corazones. Tenemos $n = 52$, $n_{\mathbf{A}} = 26$, $n_{\mathbf{AB}} = n_{\mathbf{B}} = 13$, y por esto

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \frac{n_{\mathbf{AB}}}{n_{\mathbf{A}}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}.$$

Teorema 2. *Sean* $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ *sucesos incompatibles dos a dos, los únicos posibles, y con probabilidades positivas. Sea* $\mathbf{B}$ *un suceso arbitrario. Entonces*

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_i). \tag{7}$$

La igualdad (7) *se denomina* fórmula de la probabilidad total.

Demostración. Tenemos $\mathbf{B} = \Omega\mathbf{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\mathbf{B}$. Los sucesos $\mathbf{A}_1\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}_n\mathbf{B}$ son incompatibles dos a dos, por ser dos a dos incompatibles los sucesos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$. Aplicando la regla de la suma, tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\mathbf{B}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_i),$$

donde para obtener la última igualdad nos basamos en la definición de probabilidad condicional (5). □

Ejemplo 9. Tenemos 5 cajones con productos de una cierta industria. Dos cajones contienen cada uno 4 productos buenos y 1 fallado; otros dos cajones contienen cada uno 3 productos buenos y 2 fallados; y el último cajón contiene 6 productos buenos. Se elige al azar un cajón, del cual, también al azar, se extrae un producto. Calcular la probabilidad de que el producto extraído resulte bueno.

Solución. Designemos mediante $\mathbf{B}$ al suceso consistente en que el producto extraído sea bueno. Tenemos cajones con tres composiciones distintas de productos, y designamos mediante $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ al suceso consistente en elegir un cajón con una de las composiciones dada. De esta forma (por ejemplo) se tiene: el suceso $\mathbf{A}_1$ consiste en elegir un cajón conteniendo 4 productos buenos y 1 fallado; el suceso $\mathbf{A}_2$ consiste en elegir un cajón conteniendo 3 productos buenos y 2 fallados; el suceso $\mathbf{A}_3$ consiste en elegir el cajón que contiene 6 productos buenos. Es claro que los sucesos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ son incompatibles dos a dos, y son los únicos posibles, de modo que según la fórmula (7), tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{B}) &= \mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_1) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_2) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_3)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_3)\\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{19}{25}.\end{aligned}$$

Ejemplo 10. En una cierta población de hombres hay un 30 % de fumadores. Se sabe que la probabilidad de enfermarse de cáncer de pulmón es igual a

0,1 para los fumadores, e igual a 0,01 para los no fumadores. Calcular la probabilidad de que un hombre elegido al azar en esta población esté enfermo de cáncer de pulmón.

Solución. Designemos con la letra $\mathbf{B}$ al suceso consistente en que el hombre elegido tenga esta enfermedad. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en elegir un fumador de la población. Sabemos que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0{,}3$, y que $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}) = 0{,}7$ (el suceso $\bar{\mathbf{A}}$ consiste en elegir un no fumador de la población). Por la fórmula de la probabilidad total tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}})\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \bar{\mathbf{A}}) = 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}01 = 0{,}037.$$

Teorema 3. *Sean $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ sucesos incompatibles dos a dos, los únicos posibles, y con probabilidades positivas. Sea $\mathbf{B}$ un suceso con probabilidad positiva. Entonces*

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_k \mid \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_k)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_i)} \quad (k = 1, \dots, n). \tag{8}$$

La igualdad (8) *se denomina* fórmula de Bayes.

Demostración. Por la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_k\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_k)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_k) = \mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_k \mid \mathbf{B}) \quad (k = 1, \dots, n).$$

De aquí obtenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_k \mid \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_k)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_k)}{\mathbf{P}(\mathbf{B})} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Para obtener (8), resta aplicar la fórmula de la probabilidad total (7) en el denominador. □

Ejemplo 11. En una primer urna se tienen 9 bolas blancas y 1 negra, en una segunda urna 9 bolas negras y 1 blanca. Se elige al azar una urna, y de ella, también al azar, se extrae una bola. La bola extraída resulta ser blanca (ocurrió el suceso $\mathbf{B}$). Calcular las probabilidades $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{B})$ y $\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{B})$, donde el suceso $\mathbf{A}_i$ consiste en elegir la urna i ($i = 1$ ó 2).

Solución. Por la fórmula de Bayes, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{B}) &= \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_1)}{\mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_1) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_2)} \\ &= \frac{(1/2)(9/10)}{(1/2)(9/10) + (1/2)(1/10)} = \frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{B}) = \frac{(1/2)(1/10)}{(1/2)(9/10) + (1/2)(1/10)} = \frac{1}{10}.$$

Alternativamente, una vez obtenida $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{B})$ podemos calcular directamente $\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{B})$.

9. Sucesos independientes

Consideremos un espacio de sucesos elementales Ω y dos sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Decimos que los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *independientes*, cuando se verifica

$$\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}). \tag{9}$$

Ejemplo 12. Se tira un dado dos veces consecutivas. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en obtener 6 puntos en primer tiro; el suceso $\mathbf{B}$, en obtener una cantidad impar de puntos en el segundo. Calculemos la probabilidad de estos sucesos. Como en el ejemplo 4 (ver página 4), designamos por (i, j) al resultado correspondiente a obtener i puntos en el primer tiro y j puntos en el segundo $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Hay $6 \times 6 = 36$ sucesos elementales de esta forma. Los casos favorables para la ocurrencia del suceso $\mathbf{A}$ son los puntos $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$ y $(6, 6)$; por la regla clásica del cálculo de probabilidades, tenemos $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 6/36 = 1/6$. Los casos favorables para la ocurrencia del suceso $\mathbf{B}$ son los de la forma $(i, 1), (i, 3), (i, 5)$, en donde $1 \leq i \leq 6$, por lo que $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 18/36 = 1/2$. Los casos favorables para la ocurrencia del suceso $\mathbf{AB}$ son $(6, 1), (6, 3)$ y $(6, 5)$, de forma que $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = 3/36 = 1/12$. Como

$$\mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = \mathbf{P}(\mathbf{AB}),$$

los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes.

Ejemplo 13. Consideremos el experimento correspondiente a elegir una carta al azar en un mazo de 52 cartas. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en que la carta sea una figura; y el suceso $\mathbf{B}$, en que sea negra. Demostremos que los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes. En efecto, por la regla clásica del cálculo de probabilidades, tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26},$$

de forma que se cumple la igualdad (9).

Veamos ahora que si ambos sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen probabilidad positiva (esto asegura que las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A})$ y $\mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$ están definidas), entonces, la independencia de los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es equivalente a alguna de las igualdades

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B}), \tag{10}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}). \tag{11}$$

En efecto, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes, tenemos $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})$. Por otra parte, $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$, y por esto (10) y (11) son válidas. Si se cumple una de las igualdades (10) ó (11), por ejemplo (10), entonces $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})$, y los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ son independientes.

Proposición 1. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son sucesos independientes, se cumple:* (i) $\mathbf{A}$ *y* $\bar{\mathbf{B}}$ *son independientes;* (ii) $\bar{\mathbf{A}}$ *y* $\mathbf{B}$ *son independientes;* (iii) $\bar{\mathbf{A}}$ *y* $\bar{\mathbf{B}}$ *son independientes.*

Demostración. Para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios tenemos $\mathbf{A} = \mathbf{AB} \cup \mathbf{A}\bar{\mathbf{B}}$, por lo que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{AB}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}})$. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes, en vista de (9) tenemos $\mathbf{P}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\big(1 - \mathbf{P}(\mathbf{B})\big) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\bar{\mathbf{B}})$, lo que demuestra (i). Cambiando los roles entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ obtenemos (ii). La afirmación (iii) se obtiene aplicando (i) a los sucesos $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{B}}$, que son independientes en vista de (ii). $\square$

Decimos que los sucesos $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_n$ son *independientes dos a dos*, cuando se verifica

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_j),$$

para todo $i \neq j$, donde $i, j = 1, \dots, n$.

Decimos que los sucesos $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_n$ son *mutuamente independientes*, o mas brevemente, *independientes*, cuando para todo k $(2 \leq k \leq n)$ se verifica

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{m=1}^{k} \mathbf{A}_{i_m}\Big) = \prod_{m=1}^{k} \mathbf{P}(\mathbf{A}_{i_m}), \tag{12}$$

para cualquier elección de naturales $i_1, \dots, i_k$, que cumplan la condición $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

De esta forma, la independencia mutua de tres sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, significa que se cumplen las igualdades $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})$, $\mathbf{P}(\mathbf{AC}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{P}(\mathbf{BC}) = \mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{C})$ (que implican la independencia dos a dos de los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$), y también $\mathbf{P}(\mathbf{ABC}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{C})$.

Veamos que la independencia dos a dos de n sucesos ($n \geq 3$), en general, no implica la independencia mutua de estos sucesos. Con este fin, consideramos el siguiente ejemplo, propuesto por S. N. Bernstein.

Ejemplo 14. Sea Ω un espacio de sucesos elementales compuesto por los puntos ω_1, ω_2, ω_3 y ω_4. Consideremos los sucesos $\mathbf{A} = \{\omega_1, \omega_4\}$, $\mathbf{B} = \{\omega_2, \omega_4\}$, y $\mathbf{C} = \{\omega_3, \omega_4\}$. Asignemos las probabilidades

$$\mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_2) = \mathbf{P}(\omega_3) = \mathbf{P}(\omega_4) = \frac{1}{4}.$$

Entonces, $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 2/4 = 1/2$. Análogamente obtenemos $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{C}) = 1/2$. Además, $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \mathbf{P}(\mathbf{AC}) = \mathbf{P}(\mathbf{BC}) = \mathbf{P}(\omega_4) = 1/4$. De esta forma se verifican las tres igualdades $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})$, $\mathbf{P}(\mathbf{AC}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{C})$, y $\mathbf{P}(\mathbf{BC}) = \mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{C})$, y en consecuencia, los sucesos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son independientes dos a dos. Sin embargo,

$$\mathbf{P}(\mathbf{ABC}) = \mathbf{P}(\omega_4) = \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{C}) = \frac{1}{8},$$

por lo que nos sucesos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ no son mutuamente independientes.

El ejemplo de Bernstein se puede formular de otra manera. Consideremos el experimento consistente en arrojar un tetraedro, cuyas caras están coloreadas de la siguiente forma: una cara es roja; otra cara es azul; una tercer cara es verde; y la cuarta cara tiene los tres colores indicados. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en la presencia del color rojo en la cara sobre la que se apoya el tetraedro al caer, el suceso $\mathbf{B}$ consiste en la presencia del azul, y el $\mathbf{C}$, en la presencia del verde. Los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son independientes dos a dos, pero no son mutuamente independientes.

10. Paseo al azar, triangulo de Pascal y combinaciones.

Consideremos una partícula que se desplaza, en cada paso (unidad de tiempo) una unidad de distancia para arriba o para abajo. Llamamos *paseo al azar* a dicho movimiento.

Es fácil de verificar, que en n pasos la particula puede recorrer 2^n caminos diferentes, resultantes de subir o bajar en cada uno de los pasos. Nos interesa calcular la cantidad de caminos diferentes que conducen a una altura determinada en una cantidad de pasos dada. Es claro que para el primer paso tenemos dos caminos, uno que sube y otro que baja. En el segundo paso, de los cuatro caminos que se obtienen (2^2), tenemos uno que llega a una altura 2, otro que llega a -2, y dos caminos que llegan al nivel cero. La cantidad de caminos que llegan a los niveles -3,-1,1 y 3 en tres pasos se obtienen sumando respectivamente los caminos que llegaban en dos pasos a los niveles ubicados una unidad mas arriba y una mas abajo, porque precisamente de esos niveles llegamos en un paso más hasta el nivel indicado.

Si representamos estas cantidades en una tabla obtenemos el *triángulo de Pascal*:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

La regla de formación de este triángulo es que cada línea se obtiene de la superior sumando los dos números que se encuentran arriba a la derecha y a la izquierda (asumiendo un cero cuando no hay número): por ejemplo $15 = 5 + 10$. Según vimos, para una fila dada, por ejemplo la última (pongamos $n = 6$), estos números cuentan la cantidad de caminos posibles por los que la partícula llega a las diferentes alturas en 6 pasos. Como la cantidad total de caminos que puede seguir la partícula es 2^6, tenemos que

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6 = 64,$$

como se verifica también sumando. Se observa además, por la forma de construir el triángulo, que este es simétrico (porque es simétrico el paseo si cambiamos arriba por abajo en su construcción).

Si designamos mediante C_m^n al m-ésimo número que aparece en la $n$ésima fila del triángulo de Pascal, acordando que $m = 0$ para el primer número (el número 1 de cada fila), podemos escribir su regla de formación como

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_m^{n-1},$$

donde la construcción se inicia asumiendo que

$$C_m^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente, introducimos las probabilidades, asignando probabilidades $1/2^n$ a cada uno de los 2^n caminos. No es difícil obtener que de aquí resulta que la particula en cada paso sube o baja con probabilidad $1/2$, y que los movimientos son sucesos independientes.

Si designamos mediante $P_n(m)$ a la probabilidad de obtener m subidas en n pasos, y por lo tanto encontrarse a una altura $2m-n$, dado que tenemos $n-m$ bajadas, según nuestra notación, tenemos

$$P_n(m) = \frac{C_m^n}{2^n}.$$

Llamamos *combinaciones* de n tomadas de a m a la cantidad de formas de elegir un subconjunto de m elementos de un conjunto formado por n elementos.

Por ejemplo, si tenemos las letras A, B, C, D, tenemos seis subconjuntos de dos letras:

$$\{\text{A,B}\}, \{\text{A,C}\}, \{\text{A,D}\}, \{\text{B,C}\}, \{\text{B,D}\}, \{\text{C,D}\}.$$

Resulta que las combinaciones de n tomadas de a m coinciden con el número que aparece en en m-ésimo lugar de la n-ésima fila del triángulo de Pascal. Esto resulta de observar, que, numerando de 1 a n los pasos, para contar cada camino que sube en m pasos, tenemos que elegir los m momentos de subir de esos n números, correspondiendo a cada elección un subconjunto de m elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ de pasos.

Veamos por último como pueden calcularse las combinaciones a partir de los factoriales, introducidos en la sección 4.

Mas precisamente, demostremos la fórmula

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{13}$$

Para verificar esta fórmula contamos las distintas formas de ordenar sucesivamente los n elementos de un conjunto de dos maneras distintas.

En primer lugar sabemos que la cantidad de ordenaciones posibles son $n!$.

Para el segundo cálculo, elejimos m elementos del conjunto, que ordenamos en los primeros m lugares de $m!$ factorial formas distintas. Luego, ordenamos en los $n-m$ elementos restantes de $(n-m)!$ formas distintas. Por último observamos que la primer elección de m elementos se puede hacer de C_m^n formas distintas. Es claro que cada elección de los m objetos, de su orden, y del orden de los restantes produce una ordenación diferente del conjunto inicial. Por otra parte, cualquier ordenación de este conjunto corresponde a tener m primeros elementos en un orden dado, junto con otro orden de los restantes. En definitiva hemos demostrado que

$$n! = C_m^n \times m! \times (n-m)!,$$

que es equivalente a la fórmula (13)

Ejemplo 15. Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. Se eligen al azar c bolas, donde $c \leq a+b$. Calcular la probabilidad de que entre las bolas extraídas haya a_0 bolas blancas y b_0 bolas negras.

Solución. Tenemos $a_0 + b_0 = c$, con $0 \leq a_0 \leq a$ y $0 \leq b_0 \leq b$. Es claro que la cantidad de formas distintas de elegir $a_0 + b_0$ bolas entre las $a+b$ bolas de la urna es $C_{a_0+b_0}^{a+b}$. Todas estas formas serán consideradas equiprobables. Continuando, la cantidad de formas distintas de elegir a_0 bolas blancas entre las a bolas blancas que hay en la urna, es $C_{a_0}^a$, y para cada una de las formas de elección de a_0 bolas blancas, existen $C_{b_0}^b$ formas distintas de elegir b_0 bolas negras entre las b bolas negras de la urna. Por esto, la cantidad de casos favorables para la ocurrencia del suceso $\mathbf{A}$, consistente en elegir a_0 bolas blancas y b_0 bolas negras, es $C_{a_0}^a C_{b_0}^b$. Según la definición de probabilidad, tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{C_{a_0}^a C_{b_0}^b}{C_{a_0+b_0}^{a+b}}.$$

11. Ejercicios

11.1. Un blanco se compone de 5 círculos concéntricos con radios $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$. El suceso $\mathbf{A}_k$ consiste en acertar en el círculo de radio r_k. Explicar que significan los sucesos $\mathbf{B} = \bigcup_{k=1}^5 \mathbf{A}_k$, $\mathbf{C} = \bigcap_{k=1}^5 A_k$, y $\mathbf{D} = \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{A}_2$.

11.2. Demostrar, que para dos sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios, las siguientes cuatro relaciones son equivalentes: (a) $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$; (b) $\bar{\mathbf{B}} \subset \bar{\mathbf{A}}$; (c) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$; (d) $\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}} = \emptyset$.

11.3. Un trabajador fabrica distintos productos. Sea $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ el suceso que consiste en que el producto k-ésimo sea defectuoso. Escribir los sucesos: (a) ni uno de los productos es defectuoso; (b) por lo menos uno de los productos es defectuoso; (c) solamente uno de los productos es defectuoso.

11.4. Se tiran dos dados en forma consecutiva. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en que la suma de puntos obtenidos sea par; el suceso $\mathbf{B}$, en que por lo menos en uno de los dados aparezcan 6 puntos. Describa los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A\bar{B}}$, $\overline{\mathbf{AB}}$.

11.5. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sucesos arbitrarios. El suceso $(\mathbf{A} \backslash \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \backslash \mathbf{A})$ se denomina *diferencia simétrica* entre los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y se designa mediante $\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}$. Demostrar que: (a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = (\mathbf{AB}) \cup (\mathbf{A} \triangle \mathbf{B})$; (b) $\mathbf{A} \triangle \bar{\mathbf{A}} = \Omega$; (c) $\mathbf{A} \triangle \Omega = \bar{\mathbf{A}}$.

11.6. Demostrar que si $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}_3 \subset \cdots$, entonces existe el límite $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{A})$, donde $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n$.

11.7. Demostrar que $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) \geq \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{B}})$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

11.8. Demostrar que se verifica $\mathbf{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k\big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}_k)$ para sucesos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ arbitrarios.

11.9. Demostrar que $\mathbf{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k\big) = 1 - \mathbf{P}\big(\bigcap_{k=1}^{n} \bar{\mathbf{A}}_k\big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_k)$, para sucesos $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ arbitrarios.

11.10. Demostrar que $\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{AB})$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

11.11. Una urna contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se eligen tres bolas al azar. Calcular las probabilidades de que: (a) todas las bolas extraídas sean blancas; (b) todas las bolas extraídas sean negras; (c) se extraiga una bola blanca y dos negras.

11.12. Para obtener el premio mayor en una lotería se precisa acertar 5 números elegidos entre 49. Calcular la probabilidad de obtener el premio mayor en esta lotería.

11.13. De un mazo de 52 cartas se eligen 4 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que se extraigan: (a) por lo menos un as; (b) no menos de dos ases.

11.14. Se considera un experimento consistente en arrojar un dado dos veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que la suma de los resultados sea: (a) igual a 5; (b) no mayor de 5.

11.15. Hallar la probabilidad de que al tirar un dado tres veces consecutivas, la suma de los resultados sea no menor que 16.

11.16. Calcular la probabilidad de que se acepte una partida de 100 unidades, 5 de las cuales están falladas, si se toman de muestra la mitad, y las condiciones para aceptarla son contener a lo sumo un 2 % de unidades falladas.

11.17. En el ejercicio 4 calcular las probabilidades de los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A\bar{B}}$, $\overline{\mathbf{AB}}$.

11.18. Se tienen K urnas con n bolas cada una, numeradas de 1 a n. De cada urna se elige al azar una bola. Hallar la probabilidad de que el número mayor resultante sea m $(m = 1, \dots, n)$.

11.19. Tres jugadores A, B y C extraen por turno una bola cada uno, de una urna que contiene 10 bolas blancas y 10 bolas negras. Las bolas extraídas no se reponen, y gana el primero que extrae una bola blanca. Calcular la probabilidad de que gane cada uno de los jugadores A, B, y C.

11.20. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sucesos arbitrarios, con $\mathbf{P}(\mathbf{A}) > 0$. Demostrar la desigualdad

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) \geq 1 - \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{B}})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}.$$

11.21. De una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras se extrae al azar una bola, que luego se pone en una segunda urna, que tiene 3 bolas blancas y 4 negras. Calcular la probabilidad de que una bola extraída de la segunda urna sea blanca.

11.22. Un estudiante asiste a un examen sabiendo solo 15 de las 20 preguntas del programa. En el billete del examen hay 3 preguntas. Calcular la probabilidad de que el estudiante sepa las 3 preguntas, de las dos formas siguientes: (a) aplicando las reglas clásicas del cálculo de probabilidades; (b) utilizando la noción de probabilidad condicional.

11.23. En una mesa hay tres armas de tipo A y una de tipo B. La probabilidad de acertar en el blanco con un arma de tipo A es de 0,7, y la de acertar con un arma de tipo B es 0,4. Se elige al azar un arma y se dispara un tiro al blanco. Calcular: (a) la probabilidad de fallar el tiro; (b) la probabilidad de haber elegido un arma de tipo B, sabiendo que el tiro falló.

11.24. En una caja hay 4 pelotas de tenis nuevas y 2 usadas. Para un primer partido, se eligen 2 pelotas al azar, y luego se retornan a la caja. Se eligen otras dos pelotas de la misma caja para un segundo partido. Calcular la probabilidad de que ambas sean nuevas.

11.25. Los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son tales que: $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes; $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son incompatibles; $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son independientes; $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0{,}4$ y $\mathbf{P}(\mathbf{C}) = 0{,}1$. Calcular las probabilidades de los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ y $\mathbf{A}\bar{\mathbf{B}}$.

11.26. Demostrar, que si los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes, y ambos tienen probabilidad positiva, entonces no pueden ser incompatibles.

11.27. Demostrar que si $\mathbf{A}$ es un suceso arbitrario, y $\mathbf{B}$ es tal que $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0$, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes.

11.28. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sucesos independientes, y tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Demostrar que si $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 1$.

11.29. La probabilidad de detectar un avión que vuela en una determinada región, por medio de un radar, es 0,9. En esta región operan en forma independiente tres radares. Calcular la probabilidad de que se detecte un avión en esa zona: (a) mediante los tres radares; (b) mediante por lo menos un radar.

11.30. En la fabricación de un cierto aparato se utilizan dos piezas del mismo tipo. Para que el aparato funcione, se precisa que por lo menos una de las piezas no esté fallada. La probabilidad de que la pieza esté fallada es 0,05. Calcular, bajo el supuesto de independencia, la probabilidad de que el mencionado aparato funcione.

11.31. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ sucesos independientes dos a dos y equiprobables, cada uno de los cuales tiene probabilidad p. Supongamos que $\mathbf{P}(\mathbf{ABC}) = 0$. Hallar el valor de p que hace que la probabilidad de el suceso $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ sea máxima.