Centro de Matemática. 2 de agosto de 2004

Examen de Cálculo Diferencial e Integral II

Ejercicio 1. Se considera, para $x \geq 0$, $y \geq 0$, la función

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{xe^y + ye^x}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcular los límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} g(x,y).$$

(b) Probar que g tiene extremos absolutos en su dominio y hallarlos.
(c) Calcular la integral

$$\iiint_D \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dxdydz,$$

donde $D = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Ejercicio 2. Se considera la función $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = xe^y + ye^x,$$

y los conjuntos $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = 0\}$, y $C^+ = \{(x,y) \in C \colon x > 0\}$.
(a) Probar que para cada $x > 0$ existe un único y tal que $(x,y) \in C$.
(b) Probar que C^+ es el gráfico de una función $\varphi \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferenciable. Estudiar el signo de $\varphi'(x)$ y probar que $\varphi(x) \leq 0$ para todo $x > 0$.
(c) Probar que existe $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)$ y hallarlo.
(d) Dibujar el conjunto C demostrando que es simétrico respecto de la recta $y = x$.

Ejercicio 3. Se considera un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ acotado, y la función $f_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$f_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

llamada *indicatriz* del conjunto A.
(a) Demostrar que si f_A es integrable, y se verifica $\iint f_A(x,y)dxdy = 0$, entonces A es un conjunto con medida de Jordan nula.
(b) Determinar el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f_A.
(c) Decimos que un conjunto acotado B es *medible* según Jordan cuando f_B es una función integrable, y decimos que el conjunto B tiene medida de Jordan $m(B)$, dada por

$$m(B) = \iint f_B(x,y)dxdy.$$

Demostrar que si la frontera de B tiene medida de Jordan nula, entonces B es medible según Jordan.