## Práctico 6: Integrales múltiples

**1.** Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de $f$ sobre ciertos dominios. Croquizar esos dominios y expresarlas como integrales iteradas en el orden inverso de integración.

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx \qquad \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)dy \qquad \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$$

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy \qquad \int_1^e dx \int_0^{\log(x)} f(x,y)dy$$

**2.** Calcular $\iint_D f(x,y)dxdy$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = 2x - y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

(c) $f(x,y) = xy^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y+1\}$.

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \operatorname{sen}(x)\}$.

(e) $f(x,y) = xy$ y $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ; $D = D_1 \cap \{y \geq 0\}$.

(f) $f(x,y) = (xy)^2$ y $D$ es la región acotada del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas: $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

**3.** Calcular $\int\int_D f(x,y)dxdy$ en cada uno de los siguientes casos, haciendo cambios de variable convenientes:

(a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

(b) $f(x,y) = x + y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

(d) $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ y $D$ es el triángulo de lados $y = x$, $y = -x$, $x = 1$ (se sugiere pasar a polares).

(e) $f(x,y) = (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)$ y $D$ es el cuadrado de vértices $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$.

(f) $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$. Se sugiere hacer el cambio de variable $x = \sqrt{v-u}$ , $y = v + u$.

**4.** Calcular la integral $\iint_D x dxdy$ siendo $D$ el paralelogramo de vértices $(-2/3,-1/3)$, $(2/3,1/3)$, $(4/3,-1/3)$ y $(0,-1)$ de las siguientes formas:

(a) En coordenadas cartesianas.

(b) Haciendo un cambio de variables lineal que transforme $D$ en el cuadrado de vértices: $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

**5.** Sea $U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>0\}$ y $h\colon U\to h(U)$ dada por $h(u,v)=(u+v,v-u^2)$.

(a) Probar que $h$ es un cambio de coordenadas (se hallará explícitamente $h^{-1}$).

(b) Hallar $J_h$ y $det(J_h)$ en un punto genérico. Hallar $det(J_{h^{-1}})$ en $(2,0)$, observando que $h(1,1)=(2,0)$.

(c) Sea $T$ el triángulo de lados $u=0$, $v=0$, $u+v=2$. Calcular el área de $S=h(T)$.

**6.** Demostrar la siguiente igualdad:

$$\iint_D f(xy)\ dxdy = \log(2)\int_1^2 f(u)\ du,$$

siendo $D$ la región del primer cuadrante limitada por las hipérbolas $xy=1$, $xy=2$ y las rectas $y=x$, $y=4x$.

**7.** Calcular $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, calculando $I^2$ mediante un cambio de coordenadas a polares.

**8.** *Integrales impropias*

(a) Para cada $n\in N$ definimos $D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\le n, 0\le y, 0\le x\}$. Calcular

$$\iint_{D_n} \frac{6}{(x+y+1)^3}\ dxdy$$

(b) Si $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y, 0\le x\}$, ¿existe la integral impropia $\iint_D 6(x+y+1)^{-3}dxdy$?

(c) Siendo $E_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y, 0\le x, x^2+y^2\le n\}$, calcular

$$\lim_{n\to+\infty}\iint_{E_n} \frac{6}{(x+y+1)^3}\ dxdy$$

**9.** *Integrales impropias*

(a) Siendo $D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 4\}$, calcular

$$\iint_{D_n} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(b) Si $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$ ¿existe la integral impropia $\iint_D (x^2+y^2)^{-1}dxdy$? En caso de que exista, calcularla.

**10.** Calcular $\iint_D f\ dxdydz$ en los siguientes casos:

(a) $f(x,y,z)=(x+y+z+1)^{-2}$ y $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y,\ 0\le x,\ x+y+z\le 1\}$.

(b) $f(x,y,z)=x$ y $D$ es el dominio acotado limitado por: $z=0$ , $y=0$, $y=x$, $x+y=2$, $x+y+z=6$.

(c) $f(x,y,z)=xyz$, $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y,\ 0\le x,\ 0\le z,\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

(d) $f(x,y,z)=x^2+y^2$ y $D$ es el dominio acotado comprendido entre: $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $z=2$.

(e) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$ y $D$ comprendido entre: $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $D$ comprendido entre: $z = 0$, $z = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$.

(g) $f(x,y,z) = z$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \le a \le x^2 + y^2 + z^2 \le b \}$.

(h) $f(x,y,z) = \big((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\big)^{-1/2}$ y $D$ la clausura de bola de centro en el origen y radio $r$.

**11.** Calcular el volumen de $D$:

(a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \le z \le 1\}$.

(b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \}$.

(c) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ x^2 + y^2 - rx \ge 0,\ x^2 + y^2 + rx \ge 0 \}$.

(d) $D$ comprendido entre $z = x^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.

**12.** Sea $S$ el sólido determinado por las condiciones:

$$z \le 0, \quad x^2 + y^2 \le 4, \quad x^2 + y^2 \ge z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 16.$$

Pasando a coordenadas cilíndricas calcular la integral $\iiint_S z \, dxdydz$.

**13.**(Exámen Marzo 2000) Hallar el volumen de la intersección de la bola $x^2+y^2+z^2 \le 1$ con el interior del cilindro $2x^2 + y^2 - 2x = 0$.

**14.**(Exámen 7/8/2000) Designemos mediante $(\rho, \varphi)$ las coordenadas polares en el plano $xOy$.

(a) Hacer un esquema del conjunto de puntos $(x,y)$ tales que

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2, \\ 0 \le \rho \le 2R\varphi/\pi. \end{cases}$$

Sea $S_R$ ese conjunto.

(b) Calcular el volumen del sólido intersección de la bola

$$B_R = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$

y el cilindro de generatrices paralelas a $Oz$ que se proyecta en $S_R$ sobre el plano $xOy$.

**15.**(Exámen 10/2/2000) (a) Probar que si $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \ge 2)$ es una función radial, es decir, existe una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $u(x) = f\big(\|x\|\big)$, el laplaciano de $u$ es

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \frac{1}{r^{n-1}} \big(r^{n-1} u_r\big)_r,$$

donde $r = \|x\| = \big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{1/2}$.

(b) Hallar las soluciones radiales de la Ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

en $\mathbb{R}^n - \{(0,0)\}$.

(c) Sea $F$ una solución hallada en la parte anterior para $n = 2$. Calcular

$$\iint_{B_\varepsilon} F(x,y)dxdy,$$

siendo $B_\varepsilon = \{(x,y) \colon \varepsilon^2 < x^2 + y^2 < 1\}$, y

$$\iint_{B\big((0,0),1\big)-\{(0,0)\}} F(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{B_\varepsilon} F(x,y)dxdy.$$

**16.**(Exámen 7/12/2001) Se considera en $\mathbb{R}^3$ el conjunto $S$ del plano $xOy$ limitado por la curva de ecuación $\rho = 2\varphi/\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (en coordenadas polares en el plano).

Calcular el volumen de la intersección de la bola centrada en $(0,0,0)$ y radio 1 con el cilindro de generatrices paralelas al eje $Oz$ que se proyecta sobre el plano $xOy$.

**17.**(Exámen 4/10/2002) Calcular el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ cuyos puntos verifican $(x-1/2)^2 + y^2 \leq 1/4$, y $z^2 + y^2 \leq x^2/3$.

**18.**(Exámen 1o./8/2002) Se consideral las superficies $S_1$ y $S_2$ en $\mathbb{R}^3$ dadas respectivamente por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2az = x^2 + y^2 & \qquad (S_1), \\ x^2 + y^2 - z^2 = a^2 & \qquad (S_2), \end{cases}$$

donde $a > 0$. Hallar el volumen del sólido acotado que limitan $S_1$ y $S_2$.