

**Práctico 6: Integrales múltiples**

1. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de  $f$  sobre ciertos dominios. Croquizar esos dominios y expresarlas como integrales iteradas en el orden inverso de integración.

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx \quad \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \quad \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx$$

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \quad \int_1^e dx \int_0^{\log(x)} f(x, y) dy$$

2. Calcular  $\iint_D f(x, y) dx dy$  en cada uno de los siguientes casos:

(a)  $f(x, y) = 2x - y$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .

(b)  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .

(c)  $f(x, y) = xy^2$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y + 1\}$ .

(d)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin(x)\}$ .

(e)  $f(x, y) = xy$  y  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ;  $D = D_1 \cap \{y \geq 0\}$ .

(f)  $f(x, y) = (xy)^2$  y  $D$  es la región acotada del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas:  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  y las rectas  $y = x$ ,  $y = 4x$ .

3. Calcular  $\int \int_D f(x, y) dx dy$  en cada uno de los siguientes casos, haciendo cambios de variable convenientes:

(a)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ .

(b)  $f(x, y) = x + y$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

(c)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$ .

(d)  $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$  y  $D$  es el triángulo de lados  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $x = 1$  (se sugiere pasar a polares).

(e)  $f(x, y) = (x - y)^2 \sin^2(x + y)$  y  $D$  es el cuadrado de vértices  $(0, \pi)$ ,  $(2\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ .

(f)  $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ . Se sugiere hacer el cambio de variable  $x = \sqrt{v - u}$ ,  $y = v + u$ .

4. Calcular la integral  $\iint_D x dx dy$  siendo  $D$  el paralelogramo de vértices  $(-2/3, -1/3)$ ,  $(2/3, 1/3)$ ,  $(4/3, -1/3)$  y  $(0, -1)$  de las siguientes formas:

(a) En coordenadas cartesianas.

(b) Haciendo un cambio de variables lineal que transforme  $D$  en el cuadrado de vértices:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .

5. Sea  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: u > 0\}$  y  $h: U \rightarrow h(U)$  dada por  $h(u, v) = (u + v, v - u^2)$ .
- (a) Probar que  $h$  es un cambio de coordenadas (se hallará explícitamente  $h^{-1}$ ).
- (b) Hallar  $J_h$  y  $\det(J_h)$  en un punto genérico. Hallar  $\det(J_{h^{-1}})$  en  $(2, 0)$ , observando que  $h(1, 1) = (2, 0)$ .
- (c) Sea  $T$  el triángulo de lados  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $u + v = 2$ . Calcular el área de  $S = h(T)$ .

6. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\iint_D f(xy) \, dx dy = \log(2) \int_1^2 f(u) \, du,$$

siendo  $D$  la región del primer cuadrante limitada por las hipérbolas  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  y las rectas  $y = x$ ,  $y = 4x$ .

7. Calcular  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , calculando  $I^2$  mediante un cambio de coordenadas a polares.

8. *Integrales impropias*

(a) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \leq n, 0 \leq y, 0 \leq x\}$ . Calcular

$$\iint_{D_n} \frac{6}{(x + y + 1)^3} \, dx dy$$

(b) Si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y, 0 \leq x\}$ , ¿existe la integral impropia  $\iint_D 6(x + y + 1)^{-3} dx dy$ ?

(c) Siendo  $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y, 0 \leq x, x^2 + y^2 \leq n\}$ , calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{E_n} \frac{6}{(x + y + 1)^3} \, dx dy$$

9. *Integrales impropias*

(a) Siendo  $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , calcular

$$\iint_{D_n} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

(b) Si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$  ¿existe la integral impropia  $\iint_D (x^2 + y^2)^{-1} dx dy$ ? En caso de que exista, calcularla.

10. Calcular  $\iiint_D f \, dx dy dz$  en los siguientes casos:

(a)  $f(x, y, z) = (x + y + z + 1)^{-2}$  y  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq y, 0 \leq x, x + y + z \leq 1\}$ .

(b)  $f(x, y, z) = x$  y  $D$  es el dominio acotado limitado por:  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $x + y = 2$ ,  $x + y + z = 6$ .

(c)  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq y, 0 \leq x, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

(d)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$  y  $D$  es el dominio acotado comprendido entre:  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .

- (e)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$  y  $D$  comprendido entre:  $z = 0, x = 0, x = 1, y = x^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- (f)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $D$  comprendido entre:  $z = 0, z = 1, z^2 = x^2 + y^2$ .
- (g)  $f(x, y, z) = z$  y  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq a \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b\}$ .
- (h)  $f(x, y, z) = ((x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2)^{-1/2}$  y  $D$  la clausura de bola de centro en el origen y radio  $r$ .

**11.** Calcular el volumen de  $D$ :

- (a)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq z \leq 1\}$ .
- (b)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ .
- (c)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 - rx \geq 0, x^2 + y^2 + rx \geq 0\}$ .
- (d)  $D$  comprendido entre  $z = x^2, z = 4 - x^2 - y^2$ .

**12.** Sea  $S$  el sólido determinado por las condiciones:

$$z \leq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 \geq z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 16.$$

Pasando a coordenadas cilíndricas calcular la integral  $\iiint_S z \, dx \, dy \, dz$ .

**13.**(Examen Marzo 2000) Hallar el volumen de la intersección de la bola  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  con el interior del cilindro  $2x^2 + y^2 - 2x = 0$ .

**14.**(Examen 7/8/2000) Designemos mediante  $(\rho, \varphi)$  las coordenadas polares en el plano  $xOy$ .

- (a) Hacer un esquema del conjunto de puntos  $(x, y)$  tales que

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ 0 \leq \rho \leq 2R\varphi/\pi. \end{cases}$$

Sea  $S_R$  ese conjunto.

- (b) Calcular el volumen del sólido intersección de la bola

$$B_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

y el cilindro de generatrices paralelas a  $Oz$  que se proyecta en  $S_R$  sobre el plano  $xOy$ .

**15.**(Examen 10/2/2000) (a) Probar que si  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \geq 2$ ) es una función radial, es decir, existe una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u(x) = f(\|x\|)$ , el laplaciano de  $u$  es

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} u_r)_r,$$

donde  $r = \|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ .

- (b) Hallar las soluciones radiales de la Ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

en  $\mathbb{R}^n - \{(0, 0)\}$ .

(c) Sea  $F$  una solución hallada en la parte anterior para  $n = 2$ . Calcular

$$\iint_{B_\varepsilon} F(x, y) dx dy,$$

siendo  $B_\varepsilon = \{(x, y) : \varepsilon^2 < x^2 + y^2 < 1\}$ , y

$$\iint_{B((0,0),1) - \{(0,0)\}} F(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{B_\varepsilon} F(x, y) dx dy.$$

**16.**(Examen 7/12/2001) Se considera en  $\mathbb{R}^3$  el conjunto  $S$  del plano  $xOy$  limitado por la curva de ecuación  $\rho = 2\varphi/\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  (en coordenadas polares en el plano).

Calcular el volumen de la intersección de la bola centrada en  $(0, 0, 0)$  y radio 1 con el cilindro de generatrices paralelas al eje  $Oz$  que se proyecta sobre el plano  $xOy$ .

**17.**(Examen 4/10/2002) Calcular el volumen de la región de  $\mathbb{R}^3$  cuyos puntos verifican  $(x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4$ , y  $z^2 + y^2 \leq x^2/3$ .

**18.**(Examen 1o./8/2002) Se consideren las superficies  $S_1$  y  $S_2$  en  $\mathbb{R}^3$  dadas respectivamente por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2az = x^2 + y^2 & (S_1), \\ x^2 + y^2 - z^2 = a^2 & (S_2), \end{cases}$$

donde  $a > 0$ . Hallar el volumen del sólido acotado que limitan  $S_1$  y  $S_2$ .