Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2003.

Práctico 2   Sucesiones

1. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$a_0 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Demostrar que (a_n) es monótona creciente y que está acotada superiormente. Deducir que converge y calcular su límite.

2. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$a_0 = \sqrt{3} \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Demostrar que (a_n) es monótona creciente y que está acotada superiormente. Deducir que converge y calcular su límite.

3. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$x_0 = a > 0 \qquad\qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1}, \quad \forall n \geq 0.$$

   (a) Demostrar que es creciente pero que no tiene límite finito.
   (b) Calcular $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$
   (c) Para $a = 0$ encontrar una fórmula explícita para x_n.

4. Dado un número $\lambda > 0$ consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ dada por:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\lambda}{x_n}\right), \quad \forall n \geq 0, \qquad\qquad x_0 > \sqrt{\lambda}$$

   (a) Probar que (x_n) es decreciente y que está acotada inferiormente por $\sqrt{\lambda}$. Deducir que converge y probar que su límite es $\sqrt{\lambda}$.
   (b) Sea $\epsilon_n = x_n - \sqrt{\lambda}$. Mostrar que:

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n^2}{2\,x_n} \qquad y \qquad \epsilon_{n+1} < 2\,\sqrt{\lambda}\,\left(\frac{\epsilon_1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^{2^n}, \qquad \forall n \geq 0$$

(c) Usando lo anterior y admitiendo que $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{10}$, calcular $\sqrt{3}$ con un error menor que 10^{-7}.

5. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$x_0 = 0 \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{6+x_n}{6-x_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Demostrar que converge y calcular su límite.

6. Se dice que $((a_n),(b_n))$ es un **Par de Sucesiones Monótonas Convergentes** (PSMC) si se cumple que:
i) $a_n \leq b_n,\ \forall n \geq 1.$ ii) (a_n) es creciente y (b_n) es decreciente.
iii) $\lim (b_n - a_n) = 0$.

(a) Probar que si $((a_n),(b_n))$ es un PSMC entonces existe un único número real L con
$a_n \leq L \leq b_n,\ \forall n \geq 1,$ tal que $(a_n) \longrightarrow L^-$ y $(b_n) \longrightarrow L^+$.

(b) En cada uno de los siguientes casos, investigar si $((a_n),(b_n))$ es un PSMC
(i) $a_n = 2 - 1/n^2$ $b_n = 2 + 1/n^2$ (ii) $a_n = (2n-1)/(n+2)$ $b_n = (6n+8)/(3n-1)$ (iii) $a_n = (n-1)/(n+1)$ $b_n = (n+1)/(n-1)$

7. Probar que $\lim(\alpha n^\beta)^{1/n} = 1$ $\forall \alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

8. Si $\lim x_n = a$ probar que $\lim |x_n| = |a|$.

9. Si una sucesión monótona tiene una subsucesión convergente, probar que la sucesión es también convergente.

10. Si $\lim x_n = \lim y_n = a$ y definimos (z_n) como $z_{2n-1} = x_n$ y $z_{2n} = y_n$, probar que $\lim z_n = a$.

11. Un número a se dice que es punto de adherencia (o punto de aglomeración) de la sucesión (x_n) cuando es límite de alguna subsucesión de (x_n).

(a) Hallar una sucesión cuyo conjunto de puntos de adherencia sea $A = \{1,2,3\}$. Idem para $A = \mathbb{N}$ y para $A = [0,1]$.

(b) Probar que a es punto de adherencia de la sucesión (x_n) si y sólo si $\forall\ \varepsilon > 0$ y $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists\ n > k$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.

12. Dada una sucesión (x_n) se define su límite superior como

$$\limsup x_n = \sup\{a\colon a \text{ es punto de adherencia de } (x_n)\},$$

y su límite inferior como

$$\liminf x_n = \inf\{a\colon a \text{ es punto de adherencia de } (x_n)\}.$$

(a) Probar que $\limsup x_n$ es punto de adherencia de (x_n) (es decir que el supremo es máximo).

(b) Probar que $\liminf x_n$ es punto de adherencia de (x_n) (es decir que el ínfimo es mínimo).

(c) Probar que $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ y el igual se da si sólo si existe $\lim x_n$ y además $\liminf x_n = \limsup x_n = \lim x_n$.

13. Encontrar todos los puntos de aglomeración, lim sup y lim inf de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \qquad a_n = n^2\left[1+(-1)^n\right]$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}\, cos\, \frac{2n\pi}{3} \qquad a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\, cos\, \frac{n\pi}{2}$$