Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2003.

Práctico 1

1. Probar las siguientes propiedades del valor absoluto:
   (a) $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
   (b) $||x| - |y|| \leq |x-y| \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
   (c) $|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ cualesquiera sean $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$
   (d) $|x-y| \leq r \Leftrightarrow y - r \leq x \leq y + r$ calesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

2. Probar las siguientes desigualdades:
   (a) $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \ \forall x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx \ \forall x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Decimos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada superiormente si y sólo si lo es su imagen $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. Queda definido entonces $\sup f = \sup\{f(x) : x \in X\}$. Probar que si f y g son acotadas superiormente también lo es la suma $f + g$ y además se cumple que $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$. Dar un ejemplo donde la desigualdad sea estricta.
   Enunciar y probar un resultado análogo para el ínfimo.

4. Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ acotadas superiormente, probar que el producto $f.g$ es acotada (superior e inferiormente) y además $\sup(f.g) \leq \sup f \sup g$, $\inf(f.g) \geq \inf f \inf g$. Dar ejemplos donde se den las desigualdades estrictas. ¿Qué ocurre si alguna no es positiva?

5. En las condiciones del ejercicio anterior, probar que $\sup(f^2) = (\sup f)^2$ e $\inf(f^2) = (\inf f)^2$ ¿Qué ocurre si f no es positiva?

6. Hallar si existen supremo, ínfimo, máximo, mínimo para $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ en los siguientes conjuntos: (a) $\mathbb{R} - \{-1\}$ (b) $(0, +\infty)$ (c) $(-\infty, 0]$ (d) $(-1, +\infty)$.

7. Hallar si existen supremo, ínfimo, máximo, mínimo para

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en (a) $\mathbb{R}$ (b) $(0, +\infty)$ (c) $[a, b]$ discutiendo según a y b.

8. Hallar si existen supremo, ínfimo, máximo, mínimo para los siguientes conjuntos:
(a) $\{x : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$ (b) $\{x : m(x-2)(x-m) > 0\}$ (discutir)
(c) $\{2^{-n} + 3^{-m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ (d) $\{m : \forall x \ \ x^2 - mx + 1 > 0\}$
(e) $\left\{y : y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right\}$

9. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Si $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

y la igualdad se da si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \lambda y_i \ \forall i = 1, 2, ..., n$ o $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$.
Sugerencia: considerar la función $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^2 \geq 0 \ \forall \lambda$