La obra matemática de Enrique Cabaña

José R. León R.

23 de julio de 2012

Hay en la obra de Enrique Cabaña una coherencia que sorprende. Desde sus primeros trabajos hasta los últimos emerge una continuidad que podemos catalogar de ejemplar. Desde el punto de vista de la motivación, Enrique desarrolla sus investigaciones de alto vuelo teórico siempre con un ancla en las aplicaciones. Además su obra no distingue fronteras entre la probabilidad y la estadística matemática, para él esas disciplinas son caras de una misma realidad. En estas notas trataremos de argumentar estas afirmaciones.

En los años de la década de los 40 del siglo XX, empezó una aventura intelectual con la cual se dio justificación matemática a la teoría de la probabilidad y consecuentemente a los procesos estocásticos. Dentro de muchos nombres, involucrados en esta empresa, podemos citar a Cramer, Doob, Feller, Kolmogorov, Itô, Levy, ...

A partir de las investigaciones de Nobert Wiener, que dieron base a una teoría matemática del Movimiento Browniano, se mostró que las trayectorias de ese proceso eran no diferenciables. Estudios posteriores revelaron lo indispensable que resultaba la construcción de una integral, inspirada en la Integral de Lebesge-Stieltjes, con medida integradora la "diferencial" de estas trayectorias. Fue así como fue definida la integral estocástica de Itô y Levy. Esta integral sirvió de base para el planteo y resolución de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDS). Las soluciones de estas ecuaciones, bajo ciertas condiciones de regularidad, son procesos de Markov y las densidades de transición satisfacen ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Esta asociación entre ambas ecuaciones fue sumamente fructífera tanto para la consolidación del cálculo estocástico como para el desarrollo de las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas. De un inicio en donde, por ser más desarrollada, esta última teoría era usada para demostrar propiedades y calcular las distribuciones involucradas en un proceso de difusión, se pasó a que el cálculo estocástico permitiera descubrir nuevos aspectos de las ecuaciones parabólicas.

Enrique desde sus primeros trabajos trata de generalizar la noción de integración estocástica. Hoy impresionan sus dos primeros estudios sobre la materia, *Stochastic integration in separable Hilbert spaces* [1] y *On stochastic differentials in Hilbert spaces* [2]. En ellos la noción de integral estocástica y por consiguiente la de Movimiento Browniano se extienden a espacios de Hilbert separables. Además se plantean y se resuelven EDS en espacios de Hilbert y se generaliza el famoso Lema de Itô que permite la diferenciación de funciones de diferenciales estocásticos. Quisiera mencionar que el mismo tipo de generalizaciones y más o menos en el mismo tiempo fue llevada a cabo por la escuela rusa en particular por el profesor Daletzky. Las motivaciones de esta escuela eran diferentes que las de Enrique, quien como veremos más adelante estudiaba estos conceptos para aplicarlos luego a la ecuación de onda estocástica y a la estadística, los rusos estudiaban procesos en espacios de Hilbert con el fin último de construir una teoría matemática de campos cuánticos.

Después de estos seminales trabajos Enrique comienza su profundo estudio sobre la ecuación de onda estocástica. El primero de los trabajos es, *The vibrating string forced by White Noise* [3]. En primer lugar allí se define la llamada hoja Browniana. Este proceso resulta ser una generalización a dos variables del movimiento Browniano. Es una superficie aleatoria irregular, centrada y Gaussiana. Una propiedad importante lo constituye la independencia de sus incrementos superficiales. Luego se plantea una ecuación integral estocástica para un cuerda vibrante forzada por un ruido blanco en espacio y en tiempo, el diferencial de la hoja. A continuación dicha ecuación se resuelve usando la transformada de Fourier. Esta solución permite demostrar que la energía asociada a la ecuación es una martingala y este resultado suministra una cota para las colas del proceso Gaussiano combinación lineal de la posición y de la velocidad. El artículo da muestra de una gran profundidad lo que queda evidenciado en la profusión de sus citas y en la trascendencia que tuvo en desarrollos ulteriores. A continuación de esta investigación Cabaña continúa su estudio con el artículo, *On the Barrier problem for the vibrating string* [4]. La solución obtenida antes sirve de vehículo para usar el clásico principio de reflexión de André para obtener cotas para el supremo de la ecuación de onda forzada con ruido blanco en espacio y tiempo. Estas cotas le permiten deducir evaluaciones para el supremo de la suma de variables aleatorias, simétricas e independientes y para procesos de incrementos independientes simétricos. La afición de Enrique por el principio de reflexión da muestra de su profunda cultura matemática. Este principio, conocido desde el siglo XIX, no vio una demostración rigurosa hasta bien entrado el siglo XX. En el trabajo de Cabaña cobra importancia el principio por sus aplicaciones en estadística.

La investigación sobre la hoja Browniana le permitió a Enrique en varios trabajos, hechos en conjunto con su compañero y amigo Mario Wschebor, abordar el problema difícil de acotación de las colas de procesos Gaussianos estacionarios. En dos artículos pusieron en práctica el "método de inmersión", el cual consiste en acotar la cola de esta variable aleatoria considerando la acotación del supremo de la hoja Browniana, substituyendo la medida de Lebesgue sobre el cuadrado por una medida concentrada en la diagonal. Fue así como se dieron a la luz los trabajos, *On the barrier problem for stationary Gaussian processes* [5] y *Estimaciones de la distribución del supremo de un proceso Gaussiano* [6]. El último de estos trabajos, aunque con poca difusión, da cuenta detallada del método. La demostración se hace primero para el llamado proceso de Slepian y luego por un argumento de concavidad se extiende a toda una familia de procesos. La saga de la inmersión culmina con el trabajo, *An estimate for the tails of the distribution of the supremum for a class of stationary multiparameter Gaussian* *processes* [7], donde la técnica es extendida a procesos con parámetro $d > 1$. Es de notar lo original de la aproximación y lo elemental que resulta construir estas cotas, tan complicadas de obtener por otras vías.

Quisiéramos comenzar el recuento de una nueva etapa en la investigación de Cabaña glosando un trabajo hecho en Chile en el año 1975, *Una aplicación estadística del movimiento browniano plano* [8]. Enrique, como hemos descrito más arriba, estaba familiarizado con el comportamiento de la hoja Browniana. Este conocimiento le permitió desplazar su interés hacia la determinación de cotas para la prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) para muestras de vectores aleatorios de dimensión 2. En este contexto la distribución límite del estadístico, aunque se sabe que es el supremo del puente Browniano a dos parámetros, no es conocida y sólo se poseen, aún hoy, cotas para las colas de la distribución. Pues bien en el trabajo citado Cabaña construye la prueba de KS y provee de cotas para obtener niveles aproximados. A partir de este artículo, pionero y original, continúa trabajando en el tema en Caracas y ahora con la colaboración de Wschebor.

Especial mención, en este período, merece el trabajo publicado en Annals of Probability, *The Two-parameter Brownian Bridge: Kolmogorov inequalities and upper and lower bounds for the distribution of the maximum* [10]. Los autores se atacan al problema de cuantificar la distribución del máximo de la hoja Browniana. La distribución exacta de este máximo es un problema de una formidable dificultad. En este trabajo los autores desarrollan métodos ad hoc muy originales y de una dificultad técnica proverbial, logrando construir una tabla de la aproximación de la distribución del funcional, útil para pruebas de hipótesis de tipo Kolmogorov-Smirnov para la distribución uniforme bidimensional. El artículo fue precedido por la nota *The Kolmogorov equation for a plane barrier problem* [9], el cual consistió en la base metodológica para [10].

Estas investigaciones sobre la hoja Browniana fueron complementadas por dos artículos: *A multiparameter stochastic integral and forward equations* [11] y *On the transition density of multidimensional-parameter Wiener process with one barrier* [12]. Ambos trabajos, de dificultad técnica considerable, extienden los procedimientos diseñados para dimensión dos a dimensiones mayores.

En 1982 Cabaña comienza una nueva línea de investigación: el estudio de conjuntos de nivel de procesos y campos aleatorios. Inaugura esta nueva era el artículo escrito en colaboración con Salomón Benzaquén, *The expected measure of the level set of a regular stationary Gaussian process* [13]. En este trabajo se extiende a campos Gaussianos la famosa Formula de Rice, que permite calcular la esperanza del número de cruces por un nivel de un proceso Gaussiano. La extensión es para el caso donde el proceso es un campo, es decir su parámetro es multidimensional y el funcional en cuestión es la longitud del conjunto de nivel. La demostración es una interesante mezcla de geometría diferencial con propiedades finas de los campos Gaussianos. Hay que decir que la fórmula aquí probada era de uso habitual en la literatura de la ingeniería, sin embargo es en este trabajo que se da por primera vez una demostración rigurosa. El estudio continúa con una bella nota escrita en homenaje a Sixto Ríos, *Estimation of the spectral moment by means of the extrema* [14]. No sólo en la nota se provee de un nuevo estimador del segundo momento espectral de un proceso Gaussiano estacionario, sino que además se establece una fórmula para el estimador en términos de una función de los máximos menos los mínimos del proceso. Esta forma de ver las cosas se emparenta con la prueba de Marc Kac de la fórmula de Rice, que tantas aplicaciones ha tenido en diversos dominios de la matemática. Culmina este período con los artículos: *Esperanzas de integrales sobre conjuntos de nivel aleatorios* [15] y *Affine processes: a test of isotropy based on level sets* [16]. El primero es un trabajo muy profundo. En él se extiende a campos vectoriales a parámetro multidimensional la fórmula demostrada en [13]. No solamente se consideran campos Gaussianos sino también campos que son funciones de estos y otros no Gaussianos, pero con trayectorias regulares. También se demuestran fórmulas para calcular los momentos de orden superior de los funcionales. El campo de aplicaciones de tales fórmulas es enorme, una lista somera incluye: oceanografía, óptica, ondas aleatorias, curvas nodales, transmisión de señales, modelos de neuronas, etc. Todavía en años muy recientes vemos en la literatura nuevas demostraciones de estos resultados, sin que los autores estén informados de los artículos de Cabaña. Es una pena que tal trabajo haya tenido tan poca difusión y que nunca fuese publicado en una revista de amplia cobertura. El segundo [13], combina los descubrimientos de Enrique con su gran conocimiento de la estadística clásica. Usando integrales de línea sobre curvas de nivel se construye un test de isotropía. Aunque el trabajo tiene validez sólo para campos diferenciables se puede extender a campos fractales, con interesantes aplicaciones en imágenes biomédicas.

Al final de la década de los ochenta y en los tempranos noventa Enrique continúa su aventura de explorar las propiedades probabilísticas de la hoja Browniana. Muestra de esta nueva iniciativa son dos artículos, *On two parameter Wiener Process and the Wave Equation* [17], *One characterization of two-parameter Wiener process* [18]. En ellos se introduce el concepto de string-martingalas. Demostrando en el segundo una caracterización del la hoja Browniana a través de esta noción. Algunos investigadores venezolanos se encargaron ulteriormente de explorar esta área, demostrando, por ejemplo, una descomposición de Doob-Meyer para tales procesos. Merecería esta noción ser profundizada aún más, es probable que con ella se puedan destrabar algunos de los problemas de la teoría de procesos a dos índices que son reacios a ser resueltos. De nuevo las ideas de Cabaña sobre la relación entre la ecuación de onda y la hoja Browniana, de sus trabajos de juventud, resurgen con mucha intensidad.

En el comienzo de los años noventa del siglo pasado Enrique comienza una nueva y productiva área de investigación. La tarea tiene, esta vez y en adelante, una excelente colaboradora su hija: Alejandra Cabaña. El primer artículo de la serie de esta larga cooperación es, *Goodness-of-fit and comparison tests of the Kolmogorov-Smirnov type for bivariate populations* [19]. Resulta esta investigación una especie de compendio de los trabajos que ya han sido reseñados mezclado todo a la vez con ideas nuevas, profundamente originales. En primer lugar se dan nuevas cotas para la cola del supremo de la hoja Browniana. Luego se demuestra que al aplicarle una transformación al proceso empírico, construido a partir de una muestra de un vector bidimensional, este proceso converge a una hoja Browniana. El procedimiento permite construir un test de Kolmogorov-Smirnov (K-S), consistente contra cualquier alternativa, tanto para bondad de ajuste como para comparaciones de dos muestras. Las cotas del supremo son usadas a continuación para construir niveles aproximados para el test. A este trabajo le sigue, *Bridge to bridge transformations and Kolmogorov-Smirnov tests*, [20]. Aquí se perfecciona la trasformación del proceso empírico para aproximarse a pruebas localmente óptimas. En particular con la metodología desarrollada en el artículo se da una nueva demostración de que el test K-S tiene una eficiencia relativa asintóticamente óptima contra ciertas alternativas. Además la técnica provee de test cuasi-óptimos. Este artículo contiene el germen de una metodología que les resultará muy productiva a los autores en adelante. Es la definición de una transformación que lleva el puente Browniano en el movimiento Browniano. La misma transformación aplicada al puente empírico define una martingala asociada a este proceso. Se demuestra que esta martingala converge al movimiento Browniano bajo la hipótesis nula y a este proceso más un sesgo, que resulta ser una función de L^2, bajo alternativas de contigüidad. Para ser más explícitos, se llaman alternativas de contigüidad a aquellas que se aproximan asintóticamente a la hipótesis nula a una velocidad similar a la que otorga el Teorema Central del Límite. Estas alternativas son útiles para demostrar la capacidad de un test para detectarlas asintóticamente. Una prueba siempre detectará una alternativa fija si n, el tamaño de la muestra, es lo suficientemente grande. No se puede decir lo mismo si las alternativas se acercan a la hipótesis nula cuando n tiende a infinito.

El artículo, *Transformed Empirical Processes and Modified Kolmogorov-Smirnov Tests for multivariate distributions* [21], introduce por primera vez el concepto de *transformed empirical process* (TEPs). Aunque en los dos artículos anteriormente citados ya se habían introducidos algunos elementos clave, es en este trabajo en que se introduce una especie de relación de orden de tal forma que la transformación buscada, a componer con el proceso empírico, cumpla un cierto criterio de optimalidad en esperanza. Esta propiedad lleva a construir una transformación que aplicada al proceso empírico hace que los dos procesos: bajo la hipótesis nula $\mathcal{H}_0$ y bajo la alternativa contigua $\mathcal{H}_n$ estén lo más alejados posible. A pesar de que un procedimiento similar lo habían puesto en práctica los autores en trabajos anteriores, aquí se aplica a muestras vectoriales y la metodología se afina desde el punto de vista conceptual.

Las ideas antes reseñadas han sido muy productivas permitiendo definir pruebas de isotropía para distribuciones del plano [22], pruebas de simetría [23], optimalidad para estadísticos cuadráticos (Cramer Von Mises, Anderson-Darling) [24] y [25].

Un trabajo de síntesis fue escrito por ambos autores. Nos referimos a la monografía, *Contigüidad, Pruebas de Ajuste y Procesos Empíricos Transformados* [26]. El libro fue usado como texto en la Escuela Venezolana de Matemática de 1997. Las ideas ha seguido dando sus frutos y recientemente han sido aplicadas a procesos no independientes dando lugar a investigaciones: para medir bondad de ajuste para los residuales en el modelo de regresión y definir pruebas de hipótesis que involucran procesos auto-regresivos. Y con ideas similares se consiguen pruebas para modelos autoregreesivos, también basadas en residuales reordenados: *Weak convergence of Marked Empirical Processes for focused inference on AR(p) vs AR(p+1) stationary time series* [27] es el último artículo aparecido de esta bella aventura.

Referencias

[1] CABAÑA, E. M. *Stochastic integration in separable Hilbert spaces.* Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística, v.: 4, p.: 49-80, 1966.

[2] CABAÑA, E. M. *On stochastic differentials in Hilbert spaces.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.: 20, p.: 259-265, 1969.

[3] CABAÑA, E. M. *The vibrating string forced by White Noise.* ZW. Geb. 15, p.: 111-130, 1970.

[4] CABAÑA, E. M. *On the Barrier problem for the vibrating string.* ZW. Geb. 22, p.: 13-24, 1972.

[5] CABAÑA, E. M. ; WSCHEBOR, M. *On the barrier problem for stationary Gaussian processes.* Publicaciones Del Instituto de Matemática y Estadística, v.: 4, p.: 123-128, 1969.

[6] CABAÑA, E. M. ; WSCHEBOR, M. *Estimaciones de la distribución del supremo de un proceso Gaussiano.* Prepublicaciones de la Simón Bolívar. 1980

[7] CABAÑA, E. M.; WSCHEBOR, M. *An estimate for the tails of the distribution of the supremum for a class of stationary multiparameter Gaussian processes.* Journal of Applied Probability, v.: 18, p.: 536-541, 1981.

[8] CABAÑA, E. M. *Una aplicación estadística del movimiento browniano plano.* Comunicaciones Estadísticas CIENES, v.: 28, p.: 351-355, 1975.

[9] CABAÑA, E. M. *The Kolmogorov equation for a plane barrier problem.* ZW Geb, v.: 48, p.: 285-292, 1979. Corrección ZW Geb, 58, p.: 283, 1981.

[10] CABAÑA, E. M.; WSCHEBOR, M. *The two-parameter Brownian bridge: Kolmogorov inequalities and upper and lower bounds for the distribution of the maximum.* Annals of Probability, v.: 10, p.: 289-302, 1982.

[11] CABAÑA, E. M. *A multiparameter stochastic integral and forward equations.* Stochastic Processes and their Applications, v.: 18, p.: 67 - 79, 1984.

[12] CABAÑA, E. M. *On the transition density of multidimensional-parameter Wiener process with one barrier.* Journal of Applied Probability, v.: 21, p.: 197 - 200, 1984.

[13] BENZAQUEN S.; CABAÑA, E. M. *The expected measure of the level set of a regular stationary Gaussian process.* Pacific Journal of Mathematics, v.: 103, p.: 9 - 16, 1982.

[14] CABAÑA, E. M. *Estimation of the spectral moment by means of the extrema.* Trabajos de Estadística e Investigación Operativa, v.: 36, p.: 71 - 80, 1985.

[15] CABAÑA, E. M. *Esperanzas de integrales sobre conjuntos de nivel aleatorios.* Actas del Segundo CLAPEM, 65-81. , 1987.

[16] CABAÑA, E. M. *Affine processes: a test of isotropy based on level sets.* SIAM Journal on Applied Mathematics, p.: 886 - 891, 1987.

[17] CABAÑA, E. M. *On two parameter Wiener Process and the Wave Equation.* Acta Científica Venezolana, v.: 38, p.: 550 - 555, 1989.

[18] CABAÑA, E. M. *One characterization of two-parameter Wiener process.* Statistics & Probability Letters, v.: 10, p.: 263 - 270, 1990

[19] CABAÑA, A. CABAÑA, E. M. *Goodness-of-fit and comparison tests of the Kolmogorov-Smirnov type for bivariate populations.* Annals of Statistics, v.: 22, p.: 1447 - 1459, 1994.

[20] CABAÑA, A. CABAÑA, E. M. *Bridge to bridge transformations and Kolmogorov-Smirnov tests.* Communications in Statistics-Theory and Methods, v.: 25, p.: 227 - 234, 1996.

[21] CABAÑA, A. CABAÑA, E. M. *Transformed Empirical Processes and Modified Kolmogorov - Smirnov Tests for multivariate distributions.* Annals of Statistics, v.: 25, p.:2388 - 2409, 1997.

[22] CABAÑA, E. M. *Modified Kolmogorov-Smirnov test for isotropic distributions in the plane.* Sankhya-The Indian Journal of Statistics Series A, v.: 58, p.: 440 - 463, 1996.

[23] CABAÑA, E. M.; CABAÑA, A. *Tests of symmetry based on Transformed Empirical Processes.* Canadian Journal of Statistics-Revue Canadienne de Statistique, v.: 28, p.: 829-839, 2000.

[24] CABAÑA, A. CABAÑA, E. M. *Modified Anderson-Darling test with selective power improvement.* Publicaciones Matemáticas Del Uruguay, v.: 9, p.: 1-13, 2001

[25] CABAÑA, A. CABAÑA, E. M. *Goodness-of-fit tests based on quadratic functionals of Transformed Empirical Processes.* Statistics, v.: 35, p.: 171-189, 2001.

[26] CABAÑA, E. M.; CABAÑA, A. *Contigüidad, Pruebas de Ajuste y Procesos Empíricos Transformados.* 1997. Editorial: Asociación Matemática Venezolana y Centro de Estudios Avanzados del IVIC, Caracas.

[27] CABAÑA, A, CABAÑA, E. M. and SCAVINO, M. *Weak convergence of Marked Empirical Processes for focused inference on AR(p) vs AR(p+1) stationary time series.* Methodology and Computing in Applied Probability, DOI 10.1007/s11009-011-9270-7, 2012.