НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОЙ СХОДИМОСТИ СЕМИМАРТИНГАЛОВ

Эрнесто Мордески

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, на котором выделены семейства σ-алгебр $\mathbb{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t\geq 0}$, $n \geq 1$, удовлетворяющие "обычным" условиям (см. [1]).

Пусть также $X_t^n = (X_t^n, \mathcal{F}_t^n)$, $n \geq 1$, – семимартингалы с модифицированными триплетами предсказуемых характеристик $(B^n, \tilde{C}^n, \nu^n)$ относительно фиксированной функции урезания $h = h(x)$ и квадратичными вариациями $[X^n, X^n]$ (см., напр. [1]). Для простоты изложения будем далее считать $X_0^n = 0$.

"Предельный" процесс $X = \big(X_t(\omega, \alpha), \mathcal{F}_t\big)_{t\geq 0}$ будет предполагаться непрерывным семимартингалом с $\mathcal{F}$-условно независимыми приращениями, определенным в пространстве $(\Omega \times C, \mathcal{F} \otimes \mathcal{C}, P \otimes P_W)$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F} \otimes C_s$, где $\big(C, \mathcal{C}, (\mathcal{C}_t), P_W\big)$ – каноническое винеровское пространство непрерывных функций $\alpha = (\alpha_t)_{t\geq 0}$ с мерой Винера P_W. Будем обозначать $(B, C, 0)$ триплет предсказуемых характеристик процесса X, предполагаемых $\mathcal{F}_0$-измеримыми.

В настоящей заметке рассматривается вопрос о необходимых условиях для $\mathcal{F}$-устойчивой сходимости X^n к X.

2. Будем говорить, что последовательность случайных процессов

$$X^n = (X_t^n, \mathcal{F}_t^n)_{t\geq 0},$$

заданных на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, сходится $\mathcal{F}$-устойчиво к процессу $X = \big(X_t(\omega, \alpha), \mathcal{F}_t\big)_{t\geq 0}$, заданному на $(\Omega \times \mathbb{C}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{C}, Q = P \otimes P_W)$ (обозначение: $X^n \xrightarrow{d} X$ ($\mathcal{F}$-устойчиво)), если

$$E_P\big[Y f(X^n)\big] \longrightarrow E_Q\big[Y f(X)\big] \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для всякой непрерывной относительно локально равномерной метрики ограниченной функции f, заданной на $(C, \mathcal{C})$, и ограниченной случайной величины $Y = Y(\omega)$, заданной на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Будем обозначать через $\mathrm{Var}(A)_t$ полную вариацию функций A в $[0, t]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) $X^n \xrightarrow{d} X$ *($\mathcal{F}$-устойчиво)*;

(ii) *семейство законов распределения* $\mathcal{L}\big(\mathrm{Var}(B^n) \mid P\big)$ *– плотно при всех* $t \geq 0$.

Тогда

$$\big([X^n, X^n], X^n\big) \xrightarrow{d} \big([X, X], X\big) \quad (\mathcal{F}\text{-устойчиво}).$$

Следствие 1. *Если выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 1, *то*

$$[X^n, X^n] \xrightarrow{P} C_t \quad \forall t \geq 0.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 1, *то*

$$[\gamma - \mathbb{R}^+]\tilde{C}_t^n \xrightarrow{P} \quad \forall t \geq 0;$$

$$[\delta - \mathbb{R}^+]\mathbb{I}_{\{|x|\}>\varepsilon} * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *Существует такая числовая последовательность* (a_n); $a_n \searrow 0$, *что*

$$\mathcal{F}^n_{a_n} \subseteq \mathcal{F}^{n+1}_{a_{n+1}}, \quad \sigma\left(\cup_n \mathcal{F}^n_{a_n}\right) = \sigma\left(\cup_n \mathcal{F}^n_\infty\right);$$

(b) X^n *является локальными мартингалами с ограниченными скачками* $(|\Delta X^n_t| \leq c)$;

(c) X *является непрерывным* $\mathcal{F}$*-условно гауссовским мартингалом (при каждом* $\omega \in \Omega$, $X(\omega, \cdot)$ *– гауссовский мартингал).*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $X^n \xrightarrow{d} X$ ($\mathcal{F}$-устойчиво);

(2) $[X^n, X^n]_t \xrightarrow{P} [X, X]_t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$;

(3) $[\gamma - \mathbb{R}^+] + [\delta - \mathbb{R}^+]$.

3. Доказательство сформулированных результатов основано на следующем предложении.

ЛЕММА. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– вероятностное пространство, на котором даны случайные величины* X^n *и* X, *принимающие значения в метрическом пространстве* (E, δ). *Пусть* $\mathcal{G}$ *– под-*σ*-алгебра* $\mathcal{F}$ $(\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G})$.

Следующие утверждения являются равносильными:

(1) $X^n \xrightarrow{d} X$ ($\mathcal{G}$-устойчиво);

(2) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\widetilde{P})} X \quad \forall \widetilde{P} \in \mathcal{P}$, где

$$\mathcal{P} = \{\widetilde{P} : \text{существует такая } \mathcal{G}\text{-измеримая случайная величина } Y, \text{ что } d\widetilde{P} = Y dP\}.$$

(3) Если (E, δ) – евклидово пространство и $\sigma(X) \subseteq \mathcal{G}$, то

$$\delta(X^n, X^n) \xrightarrow{d} 0.$$

Автор выражает благодарность А.Н.Ширяеву, Д.О.Крамкову и А.А.Гушину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. Berlin Heidelberg, New York: Springer, 1987.

МИАН
Universidad de la
Republica. Montevideo.
Urugvay.

Поступило в Правление общества
20.01.93.