1992 г. ноябрь — декабрь *т. 47, вып. 6(288)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

СХОДИМОСТЬ БИНАРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ПРОЦЕССЫ ХЕЛЛИНГЕРА

Эрнесто Мордески

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}) = (D, \mathcal{D}, \mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0})$ – каноническое фильтрованное пространство, где D – пространство функций $\omega = (x_t)_{t\geq 0}$, являющихся непрерывными справа и имеющими предел слева, $\mathcal{D} = \bigvee_{s\geq 0} \mathcal{D}_s^o$ и $\mathcal{D}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{D}_s^o$, где $\mathcal{D}_t^o$ – σ–алгебра, порожденная отображениями $\omega \longrightarrow x_s, s \leq t$. Предположим, что P и $\tilde{P}^n$ – вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Обозначим через $X = (X_t)_{t\geq 0}$ канонический процесс, определенный так, что $X_t(\omega) = x_t$, и пусть $a = (a_n)$ – некоторая возрастающая последовательность неотрицательных чисел $a_n \uparrow \infty$.

С рассмотренными обьектами можно связать последовательность бинарных фильтрованных статистических экспериментов

$$\mathcal{E}^n = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^n = (\mathcal{F}_t^n); (P_t^n), (\tilde{P}_t^n)),$$

где $\mathcal{F}_t^n = \mathcal{F}_{a_n t}$ и $P_t^n = P|\mathcal{F}_t^n$, $\tilde{P}_t^n = \tilde{P}^n|\mathcal{F}_t^n$ – сужение мер P и $\tilde{P}^n$ на $\mathcal{F}_t, t \geq 0$. Для простоты изложения будем далее считать $P_0^n = \tilde{P}_0^n$.

Пусть

$$Z_t^n \equiv \frac{d\tilde{P}_t^n}{dP_t^n}$$

– производная Лебега (отношение правдоподобия меры $\tilde{P}_t^n$ относительно меры P_t^n) и $h^n(\alpha) = (h(\alpha, P_t^n, \tilde{P}_t^n))_{t\geq 0}$ – процесс Хеллингера статистического эксперимента $\mathcal{E}^n$ (см. определение в [1], гл. IV).

В настоящей заметке рассматривается вопрос о сходимости статистических экспериментов (как $\mathcal{F}$–устойчивая сходимость отношений правдоподобия, см. далее) к предельному эксперименту $\mathcal{E}$, описываемому следующим образом:

$$\mathcal{E} = (\Omega \times \mathbb{C}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{C}, \{\cap_{s>t}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}_s)\}_{t\geq 0}; Q, \tilde{Q}),$$

где $(C, \mathcal{C}, (\mathcal{C}_t)_{t\geq 0}, P_W)$ – каноническое винеровское пространство непрерывных функций $\gamma = (\gamma_t)_{t\geq 0}$ с мерой Винера P_W, $Q(d\omega, d\gamma) = P(d\omega)P_W(d\gamma)$, и $\tilde{Q}(d\omega, d\gamma)$ – такая мера, что

$$\frac{d(\tilde{Q}|\bar{\mathcal{F}}_t)}{d(Q|\bar{\mathcal{F}}_t)}(\omega, \gamma) = Z_t(\omega, \gamma),$$

где $\bar{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}_s)$, $Z_t(\omega, \gamma) = \exp\{W_{C_t(\omega)}(\gamma) - \frac{1}{2}C_t(\omega)\}$, $W = (W_t(\gamma))_{t\geq 0}$ – винеровский процесс и $C = (C_t(\omega))_{t\geq 0}$ – непрерывный возрастающий процесс, играющий роль замены времены и такой, что $C_0(\omega) = 0$ и $C_t(\omega)$ является $\mathcal{F}_t$ –измеримой при каждом $t \geq 0$.

2. Будем говорить, что последовательность случайных процессов

$$X^n = (X_t^n(\omega, \gamma))_{t\geq 0},$$

заданных на $(\Omega \times \mathbb{C}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{C}, \{\cap_{s>t}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}_s)\}_{t\geq 0}, Q^n = P^n \otimes P_W)$ сходится $\mathcal{F}$–устойчиво к процессу $X = (X_t(\omega, \gamma))_{t\geq 0}$, заданному на $(\Omega \times \mathbb{C}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{C}, \{\cap_{s>t}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}_s)\}_{t\geq 0}, Q = P \otimes P_W)$ (обозначение: $X^n \xrightarrow{d} X$ $\mathcal{F}$–устойчиво), если

$$E_{Q^n}[Yf(X^n)] \longrightarrow E_Q[Yf(X)]$$

для всякой непрерывной относительно локально равномерной метрики ограниченной функции f, заданной на $(C, \mathcal{C})$, и ограниченной случайной величины $Y = Y(\omega)$, заданной на $(\Omega, \mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения являются равносильными*:

(a) $Z^n \xrightarrow{d} Z$ $\mathcal{F}$*-устойчиво*

(b) $h^n(\alpha)_t \xrightarrow{P} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} C_t \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \alpha \in (0,1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (b) равносильно (см. в [1] гл. X) следующим двум условиям:

(b_1) $h^n(1/2)_t \xrightarrow{P} \frac{1}{8} C_t \ \ \forall t \geq 0$,

(b_2) $I_t^n(1+\epsilon) \xrightarrow{P} 0 \ \ \forall t \geq 0$ ("условие Линдеберга"; см. определение I_t^n в [1], формула (1.10) в гл. X).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 обобщает теорему 1.12 гл. X в [1], в которой $C_t = C_t(\omega)$ не зависит от ω, т.е. является детерминированной заменой времени.

3. В качестве применения Теоремы 1 рассмотрим следующие эксперименты, порождаемые надкритическими ветвящимися процессами.

Пусть $\mathcal{P} = \{p = (p_i)\}$ – набор вероятностных мер (закон регенерации) в $\{1, 2, \dots\}$ таких, что

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i > 1$$

(условие надкритичности).

Пусть далее $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$, –случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где M_n обозначает число частиц n–ого поколения, $M_0 = 1$, при этом каждая частица независимо от прошлой "истории" и других частиц с вероятностью p_i превращается в i частиц.

Рассматриваемые эксперименты $\mathcal{E}^n, n \geq 1$, состоят в наблюдении количеств частиц первых n поколений, в предположении, что закон регенерации задается или распределением $p = (p_i)$, или распределением $\tilde{p}^n = (\tilde{p}_i^n)$ в $\mathcal{P}$.

Пусть P^n и $\tilde{P}^n$ обозначают соответствующие законы распределений выборки $(M_0, M_1, \dots, M_n)$, $\mathcal{F}_t^n = \sigma - \{M_i : 0 \leq i \leq [nt]\}$, $0 \leq t \leq 1$ и $\mathbb{F}^n = (\mathcal{F}_t^n : t \in \mathbb{R}^+)$. Соответствующие эксперименты $\mathcal{E}^n$ определим следующим образом:

$$\mathcal{E}^n = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^n; P^n, \tilde{P}^n).$$

Пусть, как и в п. 1 Z_t^n обозначает отношение правдоподобия меры P_t^n относительно $\tilde{P}_t^n$.

С помощью Теоремы Дуба можно доказать что в случае $1 < m < \infty$

$$\frac{M_n}{m^n} \longrightarrow \xi(\omega) \ \ P - \text{п.н.}$$

Это позволяет доказать, что процесс Хеллингера удовлетворяет

$$h^n(\alpha, P^n, \tilde{P}^n)_t \xrightarrow{P} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \xi(\omega) t \ \ \forall \alpha \in (0,1), 0 \leq t \leq 1.$$

Полагая $C_t(\omega) = \xi(\omega)t$ и опираясь на Теорему 1 получаем такой результат:

ТЕОРЕМА 2. *Следующие утверждение эквиваленты*:

(a) $Z^n \xrightarrow{d} Z$ $(\mathcal{F} - \textit{устойчиво})$, *где* $Z = \exp\{W_{\xi(\omega)t}(\gamma) - \frac{1}{2}\xi(\omega)t\}$,

(b) $H(\alpha, p, \tilde{p}^n) = 1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{m-1}{m^{n+1}} + o(\frac{1}{m^{n+1}})$, *где* $H(\alpha, p, q) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha}$ – *интеграл Хеллингера порядка* α *для мер регенерации* p *и* q.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная теорема частично решает задачу поставленную в [2] и [3].

Автор выражает благодарность А.Н. Ширяеву и Д.О. Крамкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Jacod J., Shiryayev A. N. Limit theorems for stochastic processes. Berlin- Heidelberg- New York: Springer, 1987. [**2**] Davies R.B. Asymptotic inference when the amount of information is random, Proccedings of the Berkeley Conference in Honor of Jerzy Neyman and Jack Kiefer, Vol II, 1985. [**3**] Le Cam L., Yang G. L. Distinguished statistics, loss of information and a theorem of Robert B. Davies; // Statistical decision theory and related topics IV, Vol 2 / ed. S.S. Gupta, J.O. Berger: Springer, 1988. P. 163–175.

Universidad de la Republica.
Montevideo. Urugvay

Принято редколлегией
31.08.1992