Variedades Inmersas y Teoremas Clásicos de Integración

Miguel Paternain - Alfonso Artigue

13 de agosto de 2003

Capítulo 1

Variedades Diferenciables

Primero explicaremos de forma breve las nociones de diferenciabilidad de funciones en $\mathbb{R}^n$, enunciando la Regla de la Cadena y el Teorema de la Función Inversa, que el lector debería conocer de cursos antoriores. Después definiremos las variedades diferenciables y daremos algunos ejemplos. Luego recuperaremos la noción de diferenciabilidad en las variedades, para ésto es necesario definir el espacio tangente. Finalmente, para estudiar la integración sobre variedades en el capítulo siguiente, necesitaremos dos conceptos: el de orientación y el de variedad con borde.

1.1 Funciones Diferenciables

Dados un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : U \to \mathbb{R}^m$, decimos que f es diferenciable en $x \in U$ sii existe una transformación lineal, que llamaremos diferencial de f en x, $d_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que

$$f(y) - f(x) = d_x f(y - x) + r(y), \forall y \in U \tag{1.1}$$

donde $r : U \to \mathbb{R}^m$ verifica

$$\lim_{y \to x} \frac{r(y)}{||y - x||} = 0$$

Naturalmente, decimos que f es diferenciable en U, si f es diferenciable en todos los puntos de U. Un hecho importante es que si dicha transformación lineal existe, ésta es única. Ésto lo probaremos ahora, al calcular su matriz asociada en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Definamos la derivada parcial de f respecto de x_i como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para abreviar escribiremos a veces f_{x_i} en lugar de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Observemos que si $f = (f_1, ..., f_n)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), ..., \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)\right)$$

1.1 Proposición. La entrada (j, i) de $d_x f$ es $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$.

Demostración. Observemos que la columna i-ésima de $d_x f$ es $d_x f(e_i)$, tomemos $y = x + te_i$ y al dividir la ecuación (1.1) entre t obtenemos

$$\frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = d_x f(e_i) + \frac{r(x + te_i)}{t}$$

ya que $d_x f$ es lineal, y luego

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = d_x f(e_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d_x f(e_i) \square$$

1.2 Definición. Diremos que

1. f es de clase C^0 en U (o $f \in C^o(U)$) sii f es continua en U;
2. f es de clase C^r en U (o $f \in C^r(U)$), $r \geq 1$, sii $\frac{\partial^r f_j}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_r}}$ son continuas en U, con $i_p = 1, ..., n$, $p = 1, ..., r$ y $j = 1, ..., m$;
3. f es de clase C^∞ en U (o $f \in C^\infty(U)$) sii f es de clase C^r para todo r.

En adelante diremos que una función es diferenciable cuando es de clase C^∞.

1.3 Regla de la cadena. Si f y g son diferenciables en x y $f(x)$, respectivamente, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x y además

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f$$

El resultado siguiente nos da una manera geométrica de interpretar al diferencial de una función.

1.4 Aplicación. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una función diferenciable. Entonces para todo $v \in Im(d_p f)$ existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$, $\epsilon > 0$, diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_0 = v$.

Demostración. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = d_p f(w)$. Consideremos la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(t) = tw + p$. Esta curva es diferenciable y verifica $\alpha(0) = p$. Como α es en particular continua existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset U$. Redefinamos $\alpha = \alpha_{|(-\epsilon,\epsilon)}$. Luego por la regla de la cadena tenemos lo que queríamos

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_0 = d_p f(w) = v$$

1.5 Definición. Vamos a prescindir ahora de que el dominio sea abierto para definir que una función sea diferenciable. Tomemos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ cualesquiera. Decimos que f es diferenciable sii para todo $p \in A$ existe $F : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, $p \in U$ abierto de $\mathbb{R}^n$, tal que $F_{|A\cap U} = f_{|A\cap U}$.

1.6 Ejemplo. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el eje de las x y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, 0) = 0$. Oservemos primero que f es diferenciable ya que se puede extender a todo el plano como la función nula. Ahora consideremos la siguiente extensión de f, a todo el plano, dada por $g(x, y) = y$, que es también diferenciable. El punto es que las dos extensiones dadas no tienen el mismo diferencial. Más adelante cuando estudiemos variedades con borde, necesitaremos el siguiente resultado sobre el conjunto $\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_n \geq 0\}$.

1.7 Proposición. Sea $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in \partial\mathbb{H}^n$. Entonces para toda extensión F de f, el diferencial de F es el mismo.

Demostración. Sea $F : U \to \mathbb{R}^m$ una extensión de f, $p \in U$. Vamos a calcular $d_p F(e_i)$, $i = 1, ..., n$. Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\dot\alpha(0) = e_i$. Entonces

$$d_p F(e_i) = \frac{d}{dt}(F \circ \alpha)|0 = \lim_{t\to 0} \frac{F(\alpha(t)) - F(\alpha(0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{F(\alpha(t)) - F(\alpha(0))}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\alpha(t)) - f(\alpha(0))}{t}$$

Como la última expresión no depende de la extensión F, cualquier otra extensión tendrá el mismo diferencial.

1.8 Definición. Una función biyectiva $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo sii f y f^{-1} son diferenciables; y en éste caso diremos que A y B son difeomorfos.

Observemos que en particular f y f^{-1} son continuas, abiertas y homeomorfismos. Es un ejercicio verificar que la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.

1.9 Teorema de la función inversa. Si $d_x f$ es invertible entonces existe U entorno de x tal que $f_{|U} : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.

1.10 Observación. Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son difeomorfos sii $m = n$. En efecto, si existiera un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tendríamos por la regla de la cadena que

$$id_{\mathbb{R}^n} = d_{f(x)} f^{-1} \circ d_x f$$

$$id_{\mathbb{R}^m} = d_x f \circ d_{f(x)} f^{-1};$$

luego $d_{f(x)} f^{-1} = (d_x f)^{-1}$, y por lo tanto $m = n$. Obviamente, si $m = n$, $id_{\mathbb{R}^n}$ es un difeomorfismo.

1.11 Proposición. Los conjunto $\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{R}^n$ no son difeomorfos entre si.

Demostración. Supongamos que existiera un tal difeomorfismo $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$. Sean $x \in \mathbb{H}^n$ con la última coordenada nula e $y = f(x)$. Como f es diferenciable en x existe una extensión $F : U \to \mathbb{R}^n$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in U$. Luego $f^{-1} \circ F_{|U \cap \mathbb{H}^n} = id_{U \cap \mathbb{H}^n}$ y por la regla de la cadena $d_y f^{-1} \circ d_x F = id_{\mathbb{R}^n}$. Entonces el diferencial de F en x es invertible y por el teorema de la función inversa existen abiertos $V \subset U$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ tales que $x \in V$, $y \in W$ y $F_{|V} \to W$ es un difeomorfismo. Como f es abierta, $f(V \cap \mathbb{H}^n)$ es un entorno de y, luego, por la continuidad de F, existe $z \in V$ con la última coordenada negativa tal que $F(z) \in f(V \cap \mathbb{H}^n)$. Pero entonces el punto $F(z)$ tendría una preimagen, por F, cuya última coordenada no es negativa (y por lo tanto distinta de z) contradiciendo que F es inyectiva. Absurdo.

1.2 Variedades Diferenciables

A continuación definiremos el objeto central de estas notas.

2.1 Definición. Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ es una *variedad diferenciable de dimensión* $n \geq 0$ sii $\forall p \in M$ existe un difeomorfismo $\varphi : U \to V \cap M$, donde $p \in V$ y U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^k$, respectivamente. En este caso decimos que M está inmersa en $\mathbb{R}^k$ y que φ es una parametrización (o una carta) alrededor de p.

Observemos que φ es una parametrización alrededor de cualquier punto de $\varphi(U)$.

En general llamaremos *superficies* a las variedades de dimensión 2.

Los ejemplos más sencillos de variedades (de dimensión n) son los abiertos de $\mathbb{R}^n$, ya que si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, la función id_U es una carta alrededor de todos los puntos de U. A continuación mostraremos más ejemplos de variedades.

2.2 El gráfico de una función diferenciable. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, con U abierto, definimos*

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U\}.$$

Vamos a probar que M es una variedad de dimensión n. Sea $\varphi : U \to M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definida como

$$\varphi(x) = (x, f(x)),$$

que es diferenciable. Vamos a mostrar que φ es un difeomorfismo entre U y M. Observemos primero que φ es invertible y que $\varphi^{-1} : M \to U$ es igual a $\pi_{|M}$ donde $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es la proyección dada por $\pi(x_1, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$. Como π es diferenciable, φ^{-1} también lo es por definición. Si tomamos $V = \mathbb{R}^{n+1}$ tendremos que $V \cap M = \varphi(U)$ y entonces $\varphi : U \to V \cap M$ es un difeomorfismo.$\square$

Ahora vamos a ver un resultado que de alguna manera complementa al anterior.

2.3 Proposición. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Entonces, para todo $p \in M$ existe una parametrización alrededor de p que es un gráfico.

Demostración. Tomemos una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ alrededor de $p = \varphi(u_0, v_0)$. Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ entonces

$$d_{(u_0,v_0)}\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1u}(u_0, v_0) & \varphi_{1v}(u_0, v_0) \\ \varphi_{2u}(u_0, v_0) & \varphi_{2v}(u_0, v_0) \\ \varphi_{3u}(u_0, v_0) & \varphi_{3v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_{1u}(u_0, v_0) & \varphi_{1v}(u_0, v_0) \\ \varphi_{2u}(u_0, v_0) & \varphi_{2v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Definamos $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ por $\phi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) = (\hat{u}, \hat{v})$. Entonces $d_{(u_0,v_0)}\phi$ es un isomorfismo, y por el teorema de la función inversa, tenemos $V \subset U$ y $W \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\hat{\phi} = \phi : V \to W$ es un difeomorfismo. Luego $\psi = \varphi \circ \hat{\phi}^{-1} : W \to M$ es una parametrización que es un gráfico, ya que

$$\psi(\hat{u},\hat{v}) = (\hat{u},\hat{v},\varphi_3 \circ \hat{\phi}^{-1}(\hat{u},\hat{v})).\square$$

La esfera y la Proyección Estereográfica. *Vamos a probar que* $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ *es una variedad de dimensión* n. *Para esto definamos* $S = e_{n+1}$ *y* $N = -S$ *los polos sur y norte de la esfera, respectivamente; y construyamos* $\varphi_S : \mathbb{R}^n \times \{0\} \to \mathbb{S}^n - S$, *que cubra a toda la esfera menos el polo sur, de la siguiente forma*

$$\varphi_S(x) = t(x)S + (1 - t(x))x;$$

donde $t : \mathbb{R}^n \times \{0\} \to \mathbb{R}$ *es una función que hallaremos asi: como* $\varphi_S(x) \in \mathbb{S}^n$ *y* S *es perpendicular a* x, *aplicamos Pitágoras y obtenemos*

$$1 = t(x)^2 + (1 - t(x))^2 ||x||^2$$

de donde

$$t(x) = \frac{||x||^2 \pm 1}{||x||^2 + 1}.$$

pero como $\varphi_S(x) \neq S$ *deducimos que* $t(x) = \frac{||x||^2-1}{||x||^2+1}$. *Luego* t *es diferenciable y por lo tanto* φ *lo es también. Para ver que* φ^{-1} *es diferenciable observemos que*

$$\varphi_S^{-1}(x) = s(x)S + (1 - s(x))x \text{ con } ||x|| = 1 \tag{1.2}$$

para hallar $s(x)$ *imponemos que* $\varphi_S^{-1}(x)$ *esté en el plano* $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ *(es decir* S *perpendicular a* $\varphi_S^{-1}(x)$*) y entonces*

$$s(x) = \frac{x \cdot S}{x \cdot S - 1},$$

que es diferenciable ya que $||x|| = 1$ *y* $x \neq S$. *Para ver que* φ_S^{-1} *es diferenciable, observemos que la fórmula* (1.2) *nos permite extender a* φ_S^{-1} *al conjunto* $\{(x_1, ..., x_{n+1}) : x_{n+1} < 1\}$ *de manera diferenciable; con lo cual tenemos que* φ_S^{-1} *es diferenciable. Con lo cual concluimos que* φ_S *es un difeomorfismo.*
Analogamente se puede construir φ_N *que cubra a toda la esfera menos el polo norte, con lo cual queda toda la esfera cubierta. Si hacemos lo mismo que para* φ_S *obtendremos que* $\varphi_N = T \circ \varphi_S$ *donde* $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *es* $T(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n, -x_{n+1})$.
Para que formalmente φ_S *y* φ_N *sean cartas de* $\mathbb{S}^n$ *estas deberán tener dominios en abiertos de* $\mathbb{R}^n$. *Para esto bastará considerar la función inclusión* $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *dada por* $i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0)$ *y ahora si ,*$i \circ \varphi_S$ *y* $i \circ \varphi_N$

son efectivamente parametrizaciones de $\mathbb{S}^n$.□

Vamos a ver otra forma de obtener variedades.

2.4 Definición. Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, decimos que $x \in U$ es un punto regular de f sii $d_x f$ es sobreyectivo y que $p \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular sii toda preimagen de p es un punto regular.

2.5 Proposición. La preimagen de un valor regular es una variedad.

1.3 Espacio Tangente

En el caso de una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$ uno puede interpretar geométricamente al plano tangente por un punto de S como el plano por el origen que, cuando se traslada al punto, mejor aproxima a la superficie. Formalizaremos esta idea de la siguiente manera.

3.1 Definición. Sea M una variedad diferenciable y $\varphi : U \to M$ una parametrización alrededor de $p = \varphi(x)$. Definimos el *espacio tangente* a M en p como

$$T_pM = d_x\varphi(\mathbb{R}^n)$$

Veamos que T_pM no depende de la parametrización escogida. Supongamos que $\psi : V \to M$ sea otra parametrización alrededor de p, probaremos que $d_x\varphi(\mathbb{R}^n) = d_y\psi(\mathbb{R}^n)$, siendo $y = \psi^{-1}(p)$. Para ver esto definimos $\hat{U} = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$, $\hat{V} = \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$, $\hat{\varphi} = \varphi_{|\hat{U}}$ y $\hat{\psi} = \psi_{|\hat{V}}$. Como φ y ψ son difeomorfismos, $\hat{U}$ y $\hat{V}$ son abiertos. Observemos que $f : \hat{U} \to \hat{V}$, definida como $f = \hat{\psi}^{-1} \circ \hat{\varphi}$, es un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos. Luego $d_x f$ es un isomorfismo lineal ya que $f \circ f^{-1} = id_{\hat{V}}$ y $f^{-1} \circ f = id_{\hat{U}}$ (solo resta aplicar la regla de la cadena). Como $d_x f$ es un isomorfismo tenemos que $d_x f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Ahora, como $\hat{\psi} \circ f = \hat{\varphi}$ aplicamos la regla de la cadena y obtenemos

$$d_y\hat{\psi} \circ d_x f = d_x\hat{\varphi}$$

luego

$$d_y\psi \circ d_x f = d_x\varphi$$

y entonces

$$d_x\varphi(\mathbb{R}^n) = d_y\psi(d_f(\mathbb{R}^n)) = d_y\psi(\mathbb{R}^n).$$

Antes de ver la siguiente proposición debemos observar que la dimensión de una variedad está bien definida. Esto es porque un abierto de $\mathbb{R}^n$ no puede ser difeomorfo a otro de $\mathbb{R}^m$ a menos que $n = m$. Esto se demuestra de manera análoga a que: $\mathbb{R}^m$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ sii $m = n$.

3.2 Proposición. Para todo p en $M \subset \mathbb{R}^k$, $\dim(T_pM) = \dim M$.

Demostración. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $W \subset \mathbb{R}^k$ abiertos y $\varphi : U \to W \cap M$ una carta alrededor de $p = \varphi(x)$. Como φ^{-1} es diferenciable, se puede elegir un abierto V de $\mathbb{R}^k$ tal que $W \cap M \subset V \subset W$, para el cual existe $F : V \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, tal que

$$F_{|V \cap M} = \varphi^{-1}$$

Luego $F \circ \varphi = id_U$ y por lo tanto $d_pF \circ d_x\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$ y luego

$$n = \dim\ (d_pF(d_x\varphi(\mathbb{R}^n))) \leq \dim\ d_x\varphi(\mathbb{R}^n) \leq n$$

$$\Rightarrow \dim T_pM = \dim\ d_x\varphi(\mathbb{R}^n) = n$$

3.3 Corolario. Si φ es una parametrizacín entonces $d_x\varphi : \mathbb{R}^n \to T_pM$ es un isomorfismo lineal.

1.4 Funciones diferenciables en Variedades

Sean $M \subset \mathbb{R}^k$ y $N \subset \mathbb{R}^l$ variedades y $f : M \to N$ diferenciable. Para todo p en M se define

$$d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$$

como

$$d_pf = d_pF_{|T_pM}$$

siendo $F : \hat{W} \to \mathbb{R}^l$ una extensión de f en un entorno de p, esto es, $F : \hat{W} \to \mathbb{R}^l$ es diferenciable, $\hat{W} \subset \mathbb{R}^k$ es un entorno de p y $F_{|\hat{W} \cap M} = f_{|\hat{W} \cap M}$.

Hay que verificar que la definición no depende de la extensión utilizada y que $d_pF(T_pM) \subset T_{f(p)}N$. Para esto, sea $\psi : V \to N$ una parametrización alrededor de $f(p)$. Tomemos ahora otro entorno de p, $W \subset \hat{W}$, de forma que $f(W \cap M) \subset \psi(V)$ (esto es posible por la continuidad de f) y $W \cap M$ sea la imagen de una carta $\varphi : U \to M$. Ahora podemos definir $\hat{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, que es una función diferenciable de U en V. Como F es una extensión de f, $f \circ \varphi = F \circ \varphi$. Luego tenemos que $\psi \circ \hat{f} = F \circ \varphi$ y por la regla de la cadena

$$d_y\psi \circ d_x\hat{f} = d_pF \circ d_x\varphi, \text{siendo } \psi(y) = f(p) \tag{1.3}$$

Como T_pM es la imagen de $d_x\varphi$, los vectores de T_pM son de la forma $d_x\varphi(v)$ con $v \in \mathbb{R}^n$; y luego al aplicarles d_pF obtenemos $d_y\psi(d_x\hat{f}(v))$, que es independiente de F ya que $\hat{f}$ no depende de F. Por otra parte, de (1.3) sale que

$$d_pF(T_pM) \subset d_y\psi(\mathbb{R}^m) = T_{f(p)}N.\square$$

4.1 Regla de la cadena *en variedades.* Sean $f : M \to N$ y $g : N \to Z$ funciones diferenciables en p y $f(p)$ respectivamente, entonces $g \circ f$ es diferenciable en p y además

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_pf$$

Demostración. Sean F y G extensiones locales de f y g alrededor de p y $f(p)$, respectivamente. Podemos suponer que la imagen de F está contenida en el dominio de G, ya que F es continua. Como $G \circ F$ es una extensión local de $g \circ f$, ya tenemos que $g \circ f$ es diferenciable en p. Luego,

$$d_p(g \circ f) = d_p(G \circ F)_{|T_pM} = (d_{f(p)}G \circ d_pF)_{|T_pM}$$

donde la primera igualdad es por la definición del diferencial de funciones entre varidades y la segunda es por la regla de la cadena usual. Continuemos la cuenta

$$(d_{f(p)}G \circ d_pF)_{|T_pM} = d_{f(p)}G \circ (d_pF_{|T_pM}) = d_{f(p)}G \circ d_pf = d_{f(p)}g \circ d_pf$$

donde la última igualdad es porque

$$d_pf(T_pM) \subset T_{f(p)}N\square$$

4.2 Corolario. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo entonces para cualquier $p \in M$ tenemos que d_pf es un isomorfismo lineal y además

$$(d_pf)^{-1} = d_{f(p)}f^{-1}.$$

4.3 Teorema de la función inversa *(en variedaes)*. Sea $f : M \to N$ diferenciable tal que $d_p f$ es un isomorfismo, para algún p en M. Entonces existe un entorno U de p tal que

$$f_{|U} : U \to f(U) \text{ es un difeomorfismo.}$$

Demostración. Sea $\psi : V \to N$ una paramerización alrededor de $f(p)$. Elegimos una parametrización $\varphi : W \to M$, alrededor de $p = \varphi(x)$ tal que $f(\varphi(W)) \subset \psi(V)$. Podemos entonces definir $\hat{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Como $d_p f$ es un isomorfismo, $d_x \hat{f}$ también lo es, ya que $d_x \varphi$ y $d_{f(p)} \psi^{-1}$ lo son (por el criterio anterior). Luego, el teorema de la función inversa usual permite hallar un abierto $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{f}_{|\hat{U}} : \hat{U} \to f(\hat{U})$ es un difeomorfismo y por lo tanto $f_{|\varphi(\hat{U})} : \varphi(\hat{U}) \to f(\varphi(\hat{U}))$ es un difeomorfismo. Para concluir, basta tomar $U = \varphi(\hat{U})$.$\square$

1.5 Orientación de Variedades

La idea básica de la orientación se puede ver en $\mathbb{S}^1$. Consideremos dos parametrizaciones $f, g : (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ dadas por

$$f(\theta) = (cos\,\theta, sen\,\theta),$$

$$g(\theta) = (cos\,\theta, -sen\,\theta).$$

Diremos que f y g inducen orientaciones opuestas en $\mathbb{S}^1$ ya que f la recorre en sentido antihorario y g en sentido horario. La definición formal es la siguiente.

5.1 Definición. Una variedad M es *orientable* sii existe una familia F de parametrizaciones cuyas imágenes cubren a M y si $\varphi : U \to M$ y $\psi : V \to M$ son dos parametrizaciones de F que verifican $W = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \phi$ entonces $\det(d_x f) > 0$ para todo $x \in \varphi^{-1}(W)$, siendo $f = \psi \circ \varphi_{|\varphi^{-1}(W)}$.

Una orientación de M es una familia F como arriba que es maximal.

Hay que agregar un caso particular a esta definición, que se da cuando la dimensión de la variedad es cero. Estas aparecerán naturalmente como el borde de un intervalo compacto, por ejemplo. Diremos que orientar un punto es asignarle un signo.

Una orientación de M permite orientar cada espacio tangente de M por medio de las parametrizaciones de F. Sea $\varphi : U \to M$ una parametrización de F alrededor de $p = \varphi(x)$. Elegimos como orientación de $T_p M$ la de la base

$\{d_x\varphi(e_1), ..., d_x\varphi(e_n)\}$ siendo $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Si $\psi : V \to M$ es otra parametrización de F alrededor de $\psi(y) = p$, hay que probar que $\{d_x\varphi(e_1), ..., d_x\varphi(e_n)\}$ y $\{d_y\psi(e_1), ..., d_y\psi(e_n)\}$ tienen la misma orientación. Para ello basta observar que $d_y\psi \circ d_x f = d_x\varphi$ y que $\{e_1, ..., e_n\}$ y $\{d_x f(e_1), ..., d_x f(e_n)\}$ definen la misma orientación porque $\det(d_x f) > 0$, luego $\{d_y\psi(e_1), ..., d_y\psi(e_n)\}$ y $\{d_y\psi(d_x f(e_1)), ..., d_y\psi(d_x f(e_n))\} = \{d_x\varphi(e_1), ..., d_x\varphi(e_n)\}$ tienen la misma orientación.

1.6 Variedades con Borde

Como vimos anteriormente los conjuntos $\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{R}^n$ no son difeomorfos y consecuentemente $\mathbb{H}^n$ no es una variedad. De forma analoga se puede probar que $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ no son variedades. Estos objetos son fundamentales en la teoría que estamos exponiendo y tendrán su lugar como variedades con borde, concepto que definiremos ahora.

6.1 Definición. Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ es una *variedad con borde* (de dimensión $n > 0$) sii para todo $p \in M$ existen un abierto W de $\mathbb{R}^k$ que contiene a p y un abierto U de $\mathbb{R}^n$ tales que W es difeomorfo a $U \cap \mathbb{H}^n$. El borde de una variedad con borde es ∂M, la unión de las imágenes de los mapas $\hat{\varphi}$ siendo $\hat{\varphi} = \varphi_{|U \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}}$ y $\varphi : U \to M$ una parametrización.

La primera observación que debemos hacer es que las variedades (sin borde) son variedades cuyo borde es vacío. Las tres proposiciones siguientes quedan como ejercicio.

6.2 Proposición. El borde de $\mathbb{H}^n$ es $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

6.3 Proposición. Sea U un abierto de $\mathbb{H}^n$ (es decir, existe $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $U = \mathbb{H}^n \cap V$) y $f : U \to \mathbb{H}^n$ un difeomorfismo sobre su imagen. Entonces $f(U \cap \partial\mathbb{H}^n) \subset \partial\mathbb{H}^n$.

6.4 Proposición. El borde de una variedad con borde de dimensión n es una variedad sin borde de dimensión $n - 1$.

6.5 Observación. Gracias a la proposición xx podemos definir el espacio tangente en puntos del borde, de la misma forma que antes.

6.6 Orientación del borde. Dado $p \in \partial M$ decimos que un vector $w \in T_pM$ es entrante sii $w = d_x\varphi(v)$ siendo $\varphi : U \to M$ una parametrización con $\varphi(x) = p$ y $v \cdot e_n > 0$.

Hay que probar que la definición no depende de la parametrización. Para esto consideremos otra parametrización $\psi : V \to M$ alrededor de $p = \psi(y)$, sin perder generalidad podemos suponer que $\varphi(U) = \psi(V)$ y luego podemos definir $f = \psi^{-1} \circ \varphi$. Como $p \in \partial M$ podemos elegir φ para que $x \in \partial \mathbb{H}^n$. Por el ejercicio sabemos que $f(U \cap \partial \mathbb{H}^n) \subset \partial \mathbb{H}^n$, en particular $y \in \partial \mathbb{H}^n$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $w = d_x\varphi(v)$ con $v \cdot e_n > 0$. Observemos que $d_x\varphi(v) = d_y\psi(d_xf(v))$, por lo cual sólo hay que verificar que $d_xf(v) \cdot e_n > 0$.

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(x + tv) \cdot e_n$$

Como $f(x) \in \mathbb{H}^n$, $g(t) \geq 0$ si $t \geq 0$, además $g(0) = 0$ porque $f(x) = y \in \partial \mathbb{H}^n$. Entonces $g'(0) \geq 0$ y $d_xf(v) \cdot e_n \geq 0$. Como d_xf es un isomorfismo y $d_xf(\partial \mathbb{H}^n) = \partial \mathbb{H}^n$ (porque $f(U \cap \partial \mathbb{H}^n) \subset \partial \mathbb{H}^n$) sabemos que $d_xf(v) \cdot e_n > 0$.

6.7 Proposición. Si M es orientable entonces ∂M también lo es.

Consideremos M orientada. Decimos que $\{v_1, ..., v_{n-1}\} \subset T_p\partial M$ tiene la orientación de la normal saliente sii $\{N, v_1, ..., v_{n-1}\}$ tiene la orientación de T_pM y N es un vector normal saliente.

Ahora vamos a dar una manera de caracterizar a las superficies orientables de $\mathbb{R}^3$.

6.8 Proposición. Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable sii existe un campo continuo de vectores unitarios normales a S, es decir sii existe una función $N : S \to \mathbb{R}^3$ continua tal que para todo $p \in S$ se verifica que $||N(p)|| = 1$ y $N(p) \perp T_pS$.

Demostración. El directo: Si S es orientable consideremos una familia de parametrizaciones compatibles F. Tomemos $\varphi \in F$ y definamos

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{||\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)||}$$

.

Si tomamos dos cartas que cubran a un mismo entorno, la compatibilidad de las mismas garantizan que N esté bien definido. La continuidad de N es clara.

El recíproco: Sean N un campo continuo de vectores unitarios normales a S y φ una carta de S con dominio conexo. Decimos que φ es compatible con N sii

$$N \cdot \varphi_u \wedge \varphi_v > 0$$

es decir que "apuntan para el mismo lado". Si φ fuera una carta no compatible con N entonces $\varphi \circ T$ es compatible, donde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $T(x, y) = (x, -y)$. Entonces definamos

$$F' = \{\varphi : \varphi \text{ es compatible con } N\} \cup \{\varphi \circ T : \varphi \text{ no es compatible con } N\}$$

Entonces F' es una familia de cartas compatibles y S es orientable.

Capítulo 2

Integración en Superficies

En éste capítulo definiremos las integrales de campos sobre curvas y superficies; para ésto asumiremos las integrales de Riemmann en $\mathbb{R}^n$ y usaremos la partición de la unidad explicada en el apéndice. Luego demostraremos los teoremas clásicos de Gauss y Stokes.

2.1 Integrales de Linea

1.1 Definición. Una *curva parametrizada* de clase C^r es una función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^r. La imagen de α (que usualmente llamaremos traza) no tiene por que ser una variedad, ya que por ejemplo α puede tener autointersecciones; es mas, posteriormente nos interesará que la curva sea cerrada, es decir $\alpha(a) = \alpha(b)$, sin que necesariamente se "peguen"diferenciablemente (i.e. $\frac{\dot{\alpha}(a)}{||\dot{\alpha}(a)||} \neq \frac{\dot{\alpha}(b)}{||\dot{\alpha}(b)||}$).

1.2 Definición. Un *campo de vectores* de clase C^r en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función $X : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^r.

1.3 Definición. *(Integral de un campo sobre una curva.)* Dados una curva parametrizada $\alpha : [a,b] \to U$ y un campo de vectores $X : U \to \mathbb{R}^n$, definimos la integral de X sobre α de la siguiente manera,

$$\int_\alpha X = \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\ dt$$

Si interpretamos a una curva como la trayectoria de una partícula puntual y al campo como una fuerza, la integral anterior representa el trabajo realizado por dicha partícula.

1.4 Proposición. Dados $\alpha : [a,b] \to U$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ y $f : [c,d] \to [a,b]$ diferenciables tales que, $c < d$, $a < b$, $f(c) = a$ y $f(d) = b$ entonces,

$$\int_\alpha X = \int_{\alpha \circ f} X$$

Dada una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definimos $\alpha^{-1} : [-b, -a] \to \mathbb{R}^n$ como $\alpha^{-1}(t) = \alpha(-t)$. Ésta es una curva con la misma traza pero recorrida en sentido inverso.

1.5 Proposición.

$$\int_\alpha X = -\int_{\alpha^{-1}} X$$

Dadas dos curvas parametrizadas $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $\beta : [b, c] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(b) = \beta(b)$, definimos $\alpha\beta : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ como

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(t) & a \leq t \leq b \\ \beta(t) & b \leq t \leq c \end{cases}$$

1.6 Proposición.

$$\int_{\alpha\beta} X = \int_\alpha X + \int_\beta X$$

1.7 Proposición. Dados dos campos X e Y y dos números p, $q \in R$,

$$\int_\alpha pX + qY = p\int_\alpha X + q\int_\alpha Y$$

Una función $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable por pedazos sii existen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ diferenciables tales que $\alpha = \alpha_1 ... \alpha_n$. Obsérvese que α necesariamente es continua. Definamos la integral de un campo sobre una curva diferenciable por pedazos de la siguiente manera

$$\int_\alpha X = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i} X$$

Como la descomposición de α como $\alpha_1 ... \alpha_n$ no es única, hay que probar que la integral definida anteriormente no depende de la descomposición escogida.

Si para un campo X existe una función $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $X = \nabla f$ decimos que X es de gradiente o que f es un potencial de X.

1.8 Teorema. Independencia del camino. Dado un campo $X : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es de gradiente
2. $\int_\alpha X$ depende solo de los extremos de α, para toda α diferenciable por pedazos
3. $\int_\alpha X = 0$, para toda α diferenciable por pedazos cerrada.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Si $\alpha : [a,b] \to U$ diferenciable entonces,

$$\int_\alpha X = \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\ dt = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\ dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\ dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

Si $\alpha = \alpha_1 ... \alpha_n$ con $\alpha_i : [a_i, b_i] \to U$ diferenciable

$$\int_\alpha X = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} X = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i(b_i)) - f(\alpha_i(a_i))$$

como $\alpha_i(b_i) = \alpha_{i+1}(a_{i+1})$ para $i = 1, ..., n-1$, la suma es telescópica y tenemos que

$$\int_\alpha X = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

($2 \Rightarrow 1$) Supongamos primero que U sea conexo. Elegimos $p_0 \in U$ y definimos $f : U \to \mathbb{R}$ como

$$f(p) = \int_\alpha X$$

siendo $\alpha : [-a, 0] \to U$ una curva que una a p_0 con p. Como U es abierto y conexo sabemos que existe una tal α. Resta probar que $\nabla f = X$; para ésto probaremos que para todo $p \in U$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(p) = X(p) \cdot e_i, \ \ i = 1, ..., n.$$

Definimos $\alpha_t : [0, t] \to U$ como $\alpha_t(\tau) = p + \tau e_i$, de ésta forma $\dot{\alpha}_t(\tau) = e_i$. Entonces

$$f(p + te_i) = \int_{\alpha\alpha_t} X = \int_\alpha X + \int_{\alpha_t} X = f(p) + \int_{\alpha_t} X$$

la primera igualdad es cierta porque $\alpha\alpha_t$ es una curva diferenciable por partes; y luego

$$f(p+te_i)-f(p)=\int_{\alpha_t} X=\int_0^t X(p+\tau e_i)\cdot e_i\ d\tau$$

Sumando y restando $\int_0^t X(p)\cdot e_i\ d\tau$ obtenemos,

$$f(p+te_i)-f(p)=\int_0^t X(p+\tau e_i)\cdot e_i\ d\tau-\int_0^t X(p)\cdot e_i\ d\tau+\int_0^t X(p)\cdot e_i\ d\tau$$

Como X es continuo, para todo ϵ existe un δ talque si $|\tau|<\delta$ entonces

$$||X(p+\tau e_i)-X(p)||<\epsilon$$

por lo tanto

$$\left|\int_0^t X(p+\tau e_i)\cdot e_i\ d\tau-\int_0^t X(p)\cdot e_i\ d\tau\right|=\left|\int_0^t [X(p+\tau e_i)-X(p)]\cdot e_i\ d\tau\right|\leq$$

$$\leq\int_0^t |X(p+\tau e_i)-X(p)\cdot e_i|\ d\tau\leq\int_0^t ||X(p+\tau e_i)-X(p)||\ d\tau<\int_0^t \epsilon\ d\tau=t\epsilon$$

la segunda desigualdad es por Cauchy-Schwartz. Como ϵ es arbitrario tenemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\int_0^t X(p+\tau e_i)\cdot e_i\ d\tau-\int_0^t X(p)\cdot e_i\ d\tau\right]=0$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(p)=\lim_{t\to 0}\frac{f(p+te_i)-f(p)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_0^t X(p)\cdot e_i\ d\tau=X(p)\cdot e_i$$

como queríamos probar. Pero si U no es conexo, descomponemos a U como unión disjunta de abiertos conexos,

$$U=\bigcup_i U_i$$

y para cada i definimos $f_i:U_i\to\mathbb{R}$ talque $\nabla f_i=X$, y $f:U\to\mathbb{R}$ como $f(p)=f_i(p)$ con $p\in U_i$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Si $\alpha : [a,b] \to U$ es una curva cerrada, elegimos otra curva $\gamma : [a,b] \to U$ constante tal que $\gamma(t) = \alpha(a)$, $\forall t \in [a,b]$; luego

$$\int_\alpha X = \int_\gamma X = \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\ dt = 0$$

ya que $\dot{\gamma}(t) = 0$.

(3 $\Rightarrow$ 2) Sean $\alpha : [0,a] \to U$ y $\beta : [0,a] \to U$ dos curvas que unen a p con q. La curva $\alpha\beta^{-1}$ es cerrada y diferenciable por pedazos. Luego

$$0 = \int_{\alpha\beta^{-1}} X = \int_\alpha X + \int_{\beta^{-1}} X$$

y entonces

$$\int_\alpha X = \int_\beta X$$

□

2.2 Integración en Superficies

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada. Sea $X : M \to \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable y con soporte compacto. Si $\varphi : U \to M$ es una parametrización que tiene la orientación de M y sop $X \subset \varphi(U)$, hacemos la siguiente definición (que en principio depende de φ):

$$\int_M X.n\ da = \int_U X(\varphi(u,v)).(\varphi_u \wedge \varphi_v)\ du\, dv$$

Observar que

$$\int_M X.n\ da = \int_U X(\varphi(u,v)).\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{||\varphi_u \wedge \varphi_v||}||\varphi_u \wedge \varphi_v||\ du\, dv$$

y que $n(u,v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{||\varphi_u \wedge \varphi_v||}$ es normal a la superficie y de módulo uno.

Por otra parte $da := ||\varphi_u \wedge \varphi_v||\ du\, dv$ podemos pensarlo como un elemento de área, de ahi la notación $\int_M X.n\ da$.

Para ver que la definición no depende de φ, consideremos otra parametrización $\psi : V \to M$ que tenga la orientación de M, tal que sop $X \subset \varphi(U) \cap \psi(V)$. Como hicimos anteriormente, podemos suponer que $\varphi(U) = \psi(V)$, eventualmente restringiendo U y V. Luego $f = \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$ está definida y es un difeomorfismo. Escribiendo $f = (f_1, f_2)$ tenemos $\varphi(u,v) = \psi(f_1(u,v), f_2(u,v))$. Por la regla de la cadena:

$$\varphi_u = \psi_u \circ f f_{1u} + \psi_v \circ f f_{2u}$$

$$\varphi_v = \psi_u \circ f f_{1v} + \psi_v \circ f f_{2v}$$

Luego

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \psi_u \circ f \wedge \psi_v \circ f (f_{1u} f_{2v} - f_{2u} f_{1v}) = [(\psi_u \wedge \psi_v) \circ f] \det(df)$$

Observar que $\det df > 0$ ya que φ y ψ tienen la misma orientación. Usando el cambio de variable f tenemos

$$\int_V X(\psi(u,v)).(\psi_u \wedge \psi_v)\, du\, dv = \int_U X(\psi(f(u,v))).\,[(\psi_u \wedge \psi_v)(f(u,v))]\,|\det(df(u,v))|\, du\, dv =$$

$$\int_U X(\varphi(u,v)).(\varphi_u \wedge \varphi_v)\, du\, dv$$

ya que $\det(df) > 0$.

2.1 Observación. Si sop $X \subset \varphi(U)$, sop $Y \subset \varphi(U)$, a, $b \in R$ entonces

$$\int_M (aX + bY).n\ da = a \int_M X.n\ da + b \int_M Y.n\ da$$

Definiremos ahora $\int_M X.n\ da$ cuando sop X es compacto. Sea F un cubrimiento de M por imágenes de parametrizaciones que tienen la orientación de M. Sea $\{\rho_i\}$ una partición de la unidad subordinada a F. Definimos

$$\int_M X.n\ da = \sum_i \int_M (\rho_i X).n\ da$$

Observese que $\forall i$, $\exists\ \varphi(U) \in F$ tal que sop $(\rho_i X) \subset \varphi(U)$, luego

$$\int_M (\rho_i X).n\ da$$

está definida $\forall i$.

Por otra parte, todo $p \in M$ tiene un abierto U_p entorno de p que corta solo a una cantidad finita de sop ρ_i; como sop X es compacto y los U_p lo cubren, existen $p_1, ..., p_n \in$ sop X tales que $U_{p_1}, ..., U_{p_n}$ cubren a sop X. Como los sop ρ_i que cortan a sop X son los que cortan a algún U_{p_i} y los sop ρ_i que cortan a cada U_{p_i} son una cantidad finita, sólo para una cantidad finita de valores de i, sop ρ_i corta a sop X. Portanto $\rho_i X$ se anula salvo para una cantidad finita de valores de i, luego

$$\sum_i \int_M (\rho_i X).n\ da$$

es una suma finita.

Observemos que si sop $X \subset \varphi(U)$, ambas definiciones de $\int_M X.n\ da$ coinciden en virtud de la observación 1.

Para ver que $\int_M X.n\ da$ no depende de la partición de la unidad utilizada supongamos que $\{\mu_i\}$ es otra partición de la unidad. Entonces

$$\sum_i \int_M \rho_i X.n\ da = \sum_i \int_M \rho_i(\Sigma_j\ \mu_j X).n\ da =$$

$$\sum_i \int_M (\Sigma_j\ \rho_i \mu_j X).n\ da = \sum_{i,j} \int_M \rho_i \mu_j X.n\ da$$

ya que $\operatorname{sop} \rho_i \mu_j \subset \operatorname{sop} \rho_i \subset \varphi(U)$ y alli vale la linealidad y por la misma razón que antes las sumas en j son finitas. Por otro lado desarrollando

$$\sum_i \int_M \mu_i X.n\ da = \sum_{i,j} \int_M \mu_i \rho_j X.n\ da$$

luego $\int_M X.n\ da$ está bien definida.

2.2 Ejemplo. Dada $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ y $M = \varphi(U)$. Tememos

$$\varphi_u = (1, 0, f_u),\ \ \varphi_v = (0, 1, f_v)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-f_v, -f_u, 1)$$

Si X es un campo en $\mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ tenemos

$$\int_M X.n\, da = \int_U X(u,v,f(u,v)).(-f_v,-f_u,1)\, du\, dv =$$

$$\int \{-P(u,v,f(u,v))f_u(u,v) - Q(u,v,f(u,v))f_v(u,v) + R(u,v,f(u,v))\}\, du\, dv$$

2.3 Ejemplo. Sean $S = \{r \in \mathbb{R}^3 : ||r|| = R\}$ y $E : \mathbb{R}^3 - 0 \to \mathbb{R}^3$ el campo definido por

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{||r||^3}.$$

En electromagnetismo, esta función representa el campo eléctrico generado por una carga q situada en el origen y la siguiente integral es el flujo de E a través de la superficie S.

$$\int_S E.n\, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{r}{||\mathbb{R}^3||}.\frac{r}{||r||}\, da =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{1}{\mathbb{R}^2}\, da = \frac{q}{\mathbb{R}^2 4\pi\epsilon_0}\int_S da =$$

$$\frac{q}{\mathbb{R}^2 4\pi\epsilon_0}4\pi\mathbb{R}^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por tanto tenemos la ley de Gauss:

$$\int_S E.n\, da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

2.3 Teorema de Stokes

Dados $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $X : U \to \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable, $X = (P,Q,R)$, se define rot $X : U \to \mathbb{R}^3$ como:

$$\text{rot}X = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

3.1 Teorema. (Stokes) Sean $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con borde orientada y con ∂M orientado con la normal saliente y X un campo diferenciable en un entorno de M, con soporte compacto en M. Entonces:

$$\int_{\partial M} X = \int_M \operatorname{rot} X.n \; da$$

La primera integral debemos interpretarla como una integral de linea. Para ésto debemos admitir que toda variedad de dimensión 1 es la unión de las trazas de curvas parametrizadas.

3.2 Lema. Sean A, B funciones reales definidas en $\mathbb{H}^2$ y de soporte compacto, entonces

$$\int_{\mathbb{H}^2} (B_u - A_v) \; du \, dv = \int_R A(u,0) \; du$$

Demostración.

$$\int_{\mathbb{H}^2} B_u = \int_0^{\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} B_u \; du = \int_0^{\infty} dv \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} B_u(u,v) \, du =$$

$$\int_0^{\infty} \{ \lim_{t \to +\infty} (B(t,v) - B(-t,v)) \} \; du = 0$$

ya que $\lim_{t \to +\infty} B(\pm t, v) = 0$. Por otra parte

$$- \int_{\mathbb{H}^2} A_v = - \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} A_v \; dv = - \int_{-\infty}^{+\infty} du \lim_{t \to +\infty} \int_0^{t} A_v(u,v) \, dv =$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \lim_{t \to +\infty} (A(u,t) - A(u,0)) \} \; du = \int_{-\infty}^{+\infty} A(u,0) \, du$$

Demostración. (Stokes) Como las funciones

$$X \to \int_M \operatorname{rot} X.n \, da$$

$$X \to \int_{\partial M} X$$

son lineales, alcanza con suponer que $M \cap$ sop $X \subset \varphi(U)$. Definimos

$$(A, B) = (X(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_u, X(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_v)$$

un cálculo directo muestra que

$$B_u - A_v = \operatorname{rot} X(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_u \wedge \varphi_v$$

ya que ambos miembros resultan ser iguales a

$$(R_y - Q_z)(\varphi_{2u}\varphi_{3v} - \varphi_{3u}\varphi_{2v}) + (P_z - R_x)(\varphi_{1v}\varphi_{3u} - \varphi_{3v}\varphi_{1u}) + (Q_x - P_y)(\varphi_{1u}\varphi_{2v} - \varphi_{2u}\varphi_{1v})$$

Luego

$$\int_M \operatorname{rot} X \cdot n\, da = \int_U \operatorname{rot} X(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)\; du\, dv =$$

$$\int_U B_u - A_v = \int_{\mathbb{H}^2} B_u - A_v = \int_R A(u,0) =$$

$$\int_R X(\varphi(u,0)) \cdot \varphi_u(u,0)\; du = \int_{\partial M} X.$$

2.4 Teorema de Gauss

Sea M una variedad orientada. Denotaremos por $-M$ a la variedad M con la orientación opuesta.

4.1 Proposición.

$$\int_M X \cdot n\, da = -\int_{-M} X \cdot n\, da$$

Demostración. Por los argumentos ya expuesto, es suficiente con probar la proposición cuando sop $X \subset \varphi(U)$, con $\varphi : U \to M$ una parametrización con la orientación de M. En ese caso,

$$\int_M X \cdot n\, da = \int_U X(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)\, du\, dv$$

Sean $\hat{U} = \{(-u,v) : (u,v) \in U\}$ y $\psi : \hat{U} \to M$ dada por $\psi(u,v) = \varphi(-u,v)$. Es claro que φ y ψ definen orientaciones opuestas.Por otra parte $\varphi(U) = \psi(\hat{U})$ y por tanto,

$$\int_{-M} X \cdot n\, da = \int_{\hat{U}} X(\psi(u,v)) \cdot \psi_u(u,v) \wedge \psi_v(u,v)\, du\, dv =$$

$$= \int_{\hat{U}} X(\varphi(-u,v)) \cdot \varphi_u(-u,v) \wedge \varphi_v(-u,v)\, du\, dv = -\int_U X(\varphi(u,v)) \cdot \varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)\, du\, dv$$

donde la última la identidad resulta del teorema del cambio de variable. □

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $X : U \to \mathbb{R}^3$ diferenciable. Definimos div X, la divergencia de X, como

$$\mathrm{div} X(p) = tr(d_p X)$$

siendo tr la traza; o sea, que si $X = (P, Q, R)$ entonces $\mathrm{div} X = P_x + Q_y + R_z$.

4.2 Teorema. Teorema de Gauss. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ variedad de dimensión 3 con borde y orientada con la orientación de $\mathbb{R}^3$, ∂M orientada con la normal saliente. Si $X : M \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable y con soporte compacto, entonces

$$\int_M \mathrm{div} X = \int_{\partial M} X \cdot n\, da$$

4.3 Lema. El teorema de Gauss vale si $M = \mathbb{H}^3$.

Demostración. Sea $X = (P, Q, R)$, entonces

$$\int_{\mathbb{H}^3} \mathrm{div} X = \int_{\mathbb{H}^3} P_x + Q_y + R_z =$$

$$= \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty P_x\, dx + \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty Q_y\, dy + \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty R_z\, dz$$

Obsérvese que como sop X es compacto, la misma técnica del teorema de Stokes permite afirmar que

$$\int_{-\infty}^\infty P_x\, dx = \int_{-\infty}^\infty Q_y\, dy$$

Por otra parte,

$$\int_0^\infty R_z(x, y, z) dz = -R(x, y, 0)$$

y por tanto

$$\int_{\mathbb{H}^3} \text{div}X = -\int_{\mathbb{R}^2} R(x,y,0)dxdy$$

Para calcular $\int_{\partial\mathbb{H}^3} X \cdot n\, da$, recordemos que $\partial\mathbb{H}^3$ tiene la orientación de la normal saliente. Por la proposición,

$$\int_{\partial\mathbb{H}^3} X \cdot n\, da = -\int_{-\partial\mathbb{H}^3} X \cdot n\, da$$

Obsérvese que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y) = (x,y,0)$ tiene la orientación de $-\partial\mathbb{H}^3$. Luego

$$-\int_{-\partial\mathbb{H}^3} X \cdot n\, da = -\int_{\mathbb{R}^2} X(\varphi(x,y)) \cdot \varphi_x \wedge \varphi_y\, dxdy =$$

$$-\int_{\mathbb{R}^2} X(x,y,0) \cdot e_3\, dxdy = -\int_{\mathbb{R}^2} R(x,y,0)\, dxdy$$

Demostración. (Teorema de Gauss)

Como las funciones

$$X \to \int_M \text{div}X \quad X \to \int_{\partial M} X \cdot n\, da$$

son lineales, alcanza con escribir

$$X = \Sigma_i X_i$$

y probar el teorema para cada X_i. Por otra parte, por el teorema de la partición de la unidad, podemos suponer que el soporte de cada X_i está contenido en la imagen de una parametrización y por lo tanto basta probar el teorema solo en éste caso.
Sea sop $X \subset \varphi(U)$ donde $\varphi : U \to M$ es una parametrización. Observemos que φ preserva la orientación de $\mathbb{R}^3$ ya que M tienen la orientación de $\mathbb{R}^3$.
Consideremos $\hat{X} : U \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\hat{X} = (X \circ \varphi \cdot \varphi_y \wedge \varphi_z, X \circ \varphi \cdot \varphi_z \wedge \varphi_x, X \circ \varphi \cdot \varphi_x \wedge \varphi_y)$$

Afirmación

$$\text{div}\hat{X}(p) = \text{div}X(\varphi(p)) \det d_p\varphi$$

Para demostrar la afirmación, obsérvese que

$$\mathrm{div}\hat{X}(p) = (X \circ \varphi)_x(p) \cdot \varphi_y \wedge \varphi_z(p) + (X \circ \varphi)_y(p) \cdot \varphi_z \wedge \varphi_x(p) + (X \circ \varphi)_z(p) \cdot \varphi_x \wedge \varphi_y(p)$$

Por otro lado

$$(X \circ \varphi)_x(p) = d_{\varphi(p)}X(\varphi_x(p))$$

$$(X \circ \varphi)_y(p) = d_{\varphi(p)}X(\varphi_y(p))$$

$$(X \circ \varphi)_z(p) = d_{\varphi(p)}X(\varphi_z(p))$$

por la regla de la cadena.

Sea (a_{ij}) la matriz asociada a $d_{\varphi(p)}X$ en la base $\{\varphi_x(p), \varphi_y(p), \varphi_x(p)\}$. Entonces

$$d_{\varphi(p)}X(\varphi_x(p)) = a_{11}\varphi_x(p) + a_{21}\varphi_y(p) + a_{31}\varphi_z(p)$$

$$d_{\varphi(p)}X(\varphi_y(p)) = a_{12}\varphi_x(p) + a_{22}\varphi_y(p) + a_{32}\varphi_z(p)$$

$$d_{\varphi(p)}X(\varphi_z(p)) = a_{13}\varphi_x(p) + a_{23}\varphi_y(p) + a_{33}\varphi_z(p)$$

Luego

$$\mathrm{div}\hat{X}(p) = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\varphi_x(p)(\varphi_y(p) \wedge \varphi_z(p)) =$$

$$= tr(d_{\varphi(p)}X)\det(d_p\varphi) = \mathrm{div}X(\varphi(p))\det(d_p\varphi)$$

y ésto prueba la afirmación.

Para continuar con la demostración, obsérvese que $\hat{X}$ se extiende fuera de U como cero.

$$\int_M \mathrm{div}X = \int_{\varphi(U)} \mathrm{div}X = \int_U \mathrm{div}X(\varphi(p))(\det d_p\varphi)\, dp =$$

$$\int_U \mathrm{div}\hat{X} = \int_{\mathbb{H}^3} \mathrm{div}\hat{X} = \int_{\partial\mathbb{H}^3} \hat{X} \cdot n\, da$$

Donde la segunda igualdad proviene del cambio de variable, la tercera de la afirmación y la última de la proposición.

Por lo tanto, bastará con demostrar que

$$\int_{\partial \mathbb{H}^3} \hat{X} \cdot n \, da = \int_{\partial M} X \cdot n \, da$$

Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\psi(x, y) = (x, y, 0)$. Obsérvese que $\psi_x \wedge \psi_y = e_3$ y que ψ tiene la orientación de la normal saliente. Luego

$$-\int_{-\partial \mathbb{H}^3} \hat{X} \cdot n \, da = -\int_{\mathbb{R}^2} \hat{X}(\psi(x, y)) \cdot \psi_x \wedge \psi_y \, dxdy = -\int_{\mathbb{R}^2} \hat{X}(x, y, 0) \cdot e_3 =$$

$$-\int_V \hat{X}(x, y, 0) \cdot e_3 \, dxdy = -\int_V X(\varphi(x, y, 0)) \cdot \varphi_x(x, y, 0) \wedge \varphi_y(x, y, 0) \, dxdy$$

siendo $V = \{(x, y) : (x, y, 0) \in U\}$; finalmente

$$\int_V X(\varphi(x, y, 0)) \cdot \varphi_x(x, y, 0) \wedge \varphi_y(x, y, 0) \, dxdy = \int_{-\partial M} X \cdot n \, da$$

ya que φ parametriza a ∂M con la normal entrante porque $d\varphi$ lleva, por definición, vectores entrantes en vectores entrantes. Esta observación termina el teorema, ya que

$$\int_{\partial \mathbb{H}^3} \hat{X} \cdot n \, da = -\int_{-\partial \mathbb{H}^3} \hat{X} \cdot n \, da = -\int_{-\partial M} X \cdot n \, da = \int_{\partial M} X \cdot n \, da \square$$

Capítulo 3

Apéndice

3.1 Nociones de Topología

1.1 Definición. Dado un conjunto T definimos el conjunto de partes de T como $P(T) = \{X : X \subset T\}$.

1.2 Definición. Un espacio topológico (e.t.) es un conjunto $T \neq \phi$, con una familia $A \subset P(T)$ que verifica las siguientes propiedades

1. $\phi \in A$,
2. si $\{U_\alpha\} \subset A$ entonces $\bigcup_\alpha U_\alpha \in A$,
3. si $U, V \in A$ entonces $U \cap V \in A$.

Los elementos de A serán denominados como los abiertos de la topología de T.

1.3 Observación. Los abiertos de $\mathbb{R}^n$ forman una topología de $\mathbb{R}^n$.

1.4 Observación. Si T es un e.t. y $S \subset T$ es un subconjunto cualquiera no vacío de T entonces S hereda una topología de T definiendo que los abiertos de S son los abiertos de T intersectados con S.

1.5 Ejemplo. Los ejemplos que nos interesarán son los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{H}^n$ y las variedades.

1.6 Definición. Una función $f : T \to S$, T y S espacios topológicos, es continua sii para todo abierto U de S verifica que su preimagen por f, $f^{-1}(U)$, es un abierto de la toplogía de T.

1.7 Observación. Ésta definición de continuidad coincide con la dada para funciones de $\mathbb{R}^n$ en cursos previos.

1.8 Definición. Decimos que una función es abierta sii lleva abiertos en abiertos.

1.9 Definición. Sean S y T e.t. y $f : S \to T$. Decimos que f es un homeomorfismo sii f es continua, invertible y su inversa es continua. En este caso decimos que los espacios S y T son homeomorfos.

1.10 Observación. Dados S, T y U e.t. y homeomorfismos $f : S \to T$ y $g : T \to U$ entonces $g \circ f$ es también un homeomorfismo.

1.11 Definición. Un conjunto $X \subset T$ es cerrado sii $T - X$ es abierto.

1.12 Definición. Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto sii K es cerrado y acotado.

1.13 Proposición. Un conjunto K es compacto sii todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento finito.

1.14 Definición. En un e.t. cualquiera adoptaremos a ésta última como definición de compacto.

1.15 Definición. Un conjunto $X \subset T$ es disconexo sii existen dos abiertos U y V tales que $U \cap X$ y $V \cap X$ son no vacíos y $X \subset U \cup V$.

1.16 Proposición. Todo conjunto $X \subset T$ se puede descomponer como unión disjunta de conjuntos conexos.

1.17 Definición. Dada una función continua $f : T \to S$ el soporte de f se define como sop $f = \overline{T - f^{-1}(0)})$.

3.2 Partición diferenciable de la unidad

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ e^{-1/t} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Para $0 < a < b$ definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \frac{f(b-t)}{f(t-a) + f(b-t)};$$

observemos que $g(t) = 1$ si $t \leq a$, $g(t) = 0$ si $t \geq b$ y $0 < g(t) < 1$ si $a < t < b$. Finalmente construimos $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ de la siguiente manera

$$\rho(x) = g(||x||);$$

que tiene propiedades análogas a g, es decir $\rho(x) = 1$ si $||x|| \leq a$, $\rho(x) = 0$ si $||x|| \geq b$ y $0 < \rho(x) < 1$ si $a < ||x|| < b$. Es un ejercicio verificar que f, g y ρ son de clase C^∞ en sus correspondientes dominios.

Diremos que el soporte de una función $\rho : M \to \mathbb{R}$ es la clausura del conjunto $M - \rho^{-1}(0)$ y lo denotaremos por $\operatorname{sop}(\rho)$.

2.1 Proposición. Dado $\{U_\alpha\}$ cubrimiento por abiertos de $M \subset \mathbb{R}^k$, existe una familia numerable de funciones diferenciable $\rho_i : M \to [0,1]$, $i \geq 1$, tal que:

1. para todo i existe α talque $\operatorname{sop}(\rho_i) \subset U_\alpha$,
2. para todo $x \in M$ existe un entorno de x donde todas las ρ_i, salvo una cantidad finita, son nulas,
3. $\Sigma_{i=1}^{\infty} \rho_i(x) = 1$, para todo $x \in M$.

Demostración. Sean W_α abiertos de $\mathbb{R}^k$ tales que $U_\alpha = W_\alpha \cap M$. Sea $W = \bigcup W_\alpha$. Definimos una familia de compactos K_n de la siguiente manera:

$$K_0 = \phi$$

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^k : \operatorname{dist}(x, W^c) \geq 1/n \text{ y } ||x|| \leq n\} \text{ si } n \geq 1$$

Es inmediato verificar que $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$ y que $W = \bigcup_{n \geq 0} \operatorname{int}(K_n)$, de donde

$$W = \cup_{n \geq 0}(K_{n+1} - \operatorname{int}(K_n))$$

Sean

$$A_n = K_{n+1} - \operatorname{int}(K_n)$$

$$B_n = \operatorname{int}(K_{n+2}) - K_{n-1},\ B_0 = \operatorname{int}(K_2).$$

Observemos que A_n es compacto, B_n es abierto y $A_n \subset B_n$. Por la construcción anterior, para todo $x \in A_n$ existe una función $0 \leq \rho_x \leq 1$ diferenciable tal que $\rho_x = 1$ en un entorno de x y además existe α tal que $\operatorname{sop}(\rho_x) \subset W_\alpha \subset B_n$ (para que valga la condición 1).

Por la compacidad de A_n existe una cantidad finita ρ_1^n,...,$\rho_{m_n}^n$, cuyos soportes cubren a A_n. Observar que $\rho_j^n \equiv 0$ en K_{n-1} para $k \geq n-1$, $1 \leq j \leq m_n$, luego en el abierto $intK_{n-1} \subset K_{n-1}$ se anulan todas las ρ_j^n salvo una cantidad finita. Como $\bigcup_n intK_n = W$, se cumple la condición 2. Para que valga la condición 3, reenumeramos la funciones ρ_j^n como $\hat{\rho}_i$ y tomamos

$$\overline{\rho}_i = \frac{\hat{\rho}_i}{\Sigma_i \hat{\rho}_i}$$

entonces las funciones que queríamos son $\rho_i = \overline{\rho}_{i|M}$. $\square$

Índice General