SUR LE DEGRÉ DYNAMIQUE DES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DU PLAN QUI STABILISENT UNE COURBE IRRATIONNELLE NON-ELLIPTIQUE

IVAN PAN [1]

RÉSUMÉ. On montre que le premier degré dynamique d'une transformation de Cremona du plan qui stabilise une courbe irrationnelle non elliptique est égal à 1. De plus, parmi ces transformations, on caractérise celles qui sont d'ordre fini.

RÉSUMÉ. We show that the first dynamical degree of a Cremona transformation stabilizing an irrational non elliptic curve is 1. Moreover, among them we caracterize those which have finit order.

1. INTRODUCTION

On désigne par $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le plan projectif sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Fixons $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible ; on note $g(C)$ le genre de sa normalisation.

Soit $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona du plan projectif ; observons que C n'est collapsée par F que lorsque $g(C) = 0$. On dira que F *stabilise* C si elle induit, par restriction, une application birationnelle de C dans C. Une telle transformation appartient au *Groupe de décomposition de* C d'après M. H. Gizatullin [13].

Finalement, on note

$$\lambda(F) := \lim_{n\to\infty} \deg(F^n)^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

où $\deg(F^n)$ dénote le degré (algébrique) de F^n : c'est un invariant par conjugaison qui coïncide avec le *premier degré dynamique* de F qui est défini dans [11] and [18] ou [8] (voir §2 plus loin).

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Supposons que $g(C) > 1$. Soit $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona qui stabilise C. On a :*

(a) $\lambda(F) = 1$ et la suite $\{\deg F^n\}$ croît au plus linéairement.

(b) si F est conjuguée à un automorphisme d'une surface rationnelle (lisse), alors F est d'ordre fini.

(c) si la normalisation de C n'est pas hyperelliptique, alors F est d'ordre fini.

L'exemple plus bas montre que l'hypothèse portant sur la normalisation de C est nécessaire dans l'assertion (c). Pour un exemple de transformation avec $\lambda > 1$ qui stabilise une courbe rationnelle voir l'exemple 2.4.

1. Partiellement soutenu par le CNPq-Brasil

Exemple 1.2. Considérons la courbe plane hyperelliptique C d'équation affine

$$y^2 = h(x),$$

où h est un polynôme sans racine multiple de degré $2g+2$ pour $g = 1, 2, \ldots$ Une application birationnelle de $\mathbb{C}^2$ qui préserve les droites verticales et fixe les points de C s'écrit sous la forme

$$(x, y) \mapsto (x, \frac{a(x)y + h(x)}{y + a(x)}),$$

avec $a(x)^2 - h(x) \not\equiv 0$ pour $a \in \mathbb{C}(x)$. Observons que pour a générique une telle transformation est d'ordre infini ; néanmoins son premier degré dynamique est 1 (voir par exemple [3] ou [8, lem. 4.2]). Cette transformation appartient au *Groupe d'inertie* de C d'après [13].

Dans [7] on exhibe une écriture pour une transformation qui stabilise une courbe C en termes de l'équation de la courbe (la référence à ce travail, dont le titre apparaît incomplet, a été prise de [12, chap. VIII, §2, No. 465]).

Du théorème suivent les corollaires suivants :

Corollaire 1.3. *Soit $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona. On a :*

a) Si $\lambda(F) > 1$ la transformation F ne stabilise pas de courbe irréductible de genre > 1.

b) Si F stabilise une courbe irréductible non hyperelliptique (donc de genre ≥ 3), alors elle est d'ordre fini et conjuguée à un automorphisme d'une surface rationnelle.

c) Si F stabilise une courbe irréductible hyperelliptique de genre ≥ 2, alors la suite $\{\deg F^n\}$ croît au plus linéairement.

Remarque 1.4. Si F est d'ordre fini, alors $\lambda(F) = 1$ et d'après [10, Thm. 3.2] elle est conjuguée à un automorphisme.

Corollaire 1.5. *Si F stabilise C avec $g(C) > 1$, alors F est d'ordre fini si et seulement si $\lambda(F) = 1$ et F est conjuguée à un automorphisme d'une surface rationnelle.*

Remerciements. J'aimerais remercier Charles Favre d'abord pour ses précisions sur la dynamique des applications birationnelles (notamment celles sur le degré dynamique) et puis pour ses précieuses suggestions par rapport à la rédaction de ce travail.

2. Le résultat principal

Soit $\varphi : X \dashrightarrow X$ une application birationnelle d'une surface projective lisse.

On dira que φ est *conjuguée* à une application birationnelle $\psi : \widetilde{X} \dashrightarrow \widetilde{X}$ s'il existe une application birationnelle $\tau : \widetilde{X} \dashrightarrow X$ telle que $\varphi = \tau \circ \psi \circ \tau^{-1}$.

Comme dans [8], on peut définir le *premier degré dynamique* $\lambda(\varphi) = \lambda_1(\varphi)$: c'est un invariant de la classe de conjugaison de φ, qui dans le cas où $X = \mathbb{P}^2$ coïncide avec celui de l'équation (1) (voir [8, Pro. 1.18, Cor. 1.19, Cor. 2.1]).

Un automorphisme d'une surface projective lisse $\sigma : X \to X$ est *isotope à l'identité* s'il est le flot au temps 1 d'un champ de vecteurs holomorphe.

Pour démontrer le théorème 1.1 on a besoin des deux résultats ci-dessous ; ici $\operatorname{ord} F$ désigne l'*ordre* de l'application F.

Proposition 2.1. *Soient C une courbe irréductible et $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona qui stabilise C. Supposons que $g(C) > 1$ et $\lambda(F) = 1$. Alors, on a, ou moins, l'une des situations (non exclusives) suivantes :*

a) F est d'ordre fini ;

b) F préserve un pinceau de courbes rationnelles. Dans ce cas, si $\operatorname{ord} F > \operatorname{ord}(F|_C)$, alors (la normalisation de) C est hyperelliptique et la suite $\{\deg F^n\}$ croît au plus linéairement.

En plus, si F n'est pas d'ordre fini, F n'est pas conjuguée à un automorphisme.

Démonstration. Notons $m := \operatorname{ord} F|_C$, l'ordre de la restriction de F à C.

Supposons d'abord que F préserve un pinceau de courbes rationnelles. Quitte à résoudre les points d'indéterminations du pinceau, on peut remplacer $\mathbb{P}^2$ par une fibration rationnelle $X \to \mathbb{P}^1$ et F par une application birationnelle $\varphi : X \dashrightarrow X$ qui commute avec celle-ci ; puisque C n'est pas une fibre de la fibration, φ^m stabilise chaque fibre et y fixe k points (comptés avec multiplicités) avec $k \geq 2$. Si $\varphi^m \neq id$, c'est-à-dire $\operatorname{ord} F > \operatorname{ord}(F|_C)$, alors $k = 2$ et la normalisation de C est hyperelliptique ; si $k > 2$ l'application est d'ordre m.

Par ailleurs, d'après le théorème de J. Diller et C. Favre [8, Thm. 0.2] on a exactement l'une des situations suivantes (voir aussi [14] où le cas iii) est démontré) :

i) la suite $\{\deg F^n\}$ est bornée et F^ℓ est conjuguée à un automorphisme isotope à l'identité pour un $\ell \in \mathbb{N}$.

ii) la suite $\{\deg F^n\}$ croît linéairement et F préserve un pinceau de courbes rationnelles ; dans ce cas F n'est pas conjuguée à un automorphisme.

iii) la suite $\{\deg F^n\}$ croît quadratiquement et F est conjuguée à un automorphisme qui préserve une fibration elliptique.

Si F ne préserve pas de pinceau de courbes rationnelles, elle satisfait donc i) ou iii).

Supposons qu'on est dans la situation i) ; notons $\sigma : X \to X$ un automorphisme isotope à l'identité qui est conjugué à F^ℓ pour un $\ell \in \mathbb{N}$. Soit v le champ de vecteurs sur X dont le flot au temps 1 est σ. Il existe une application birationnelle $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui conjugue v avec un champ de vecteurs de la forme $v_1 \oplus v_2$ avec v_i des champs de vecteurs sur $\mathbb{P}^1$, $i = 1, 2$: c'est un résultat classique dont une preuve peut être trouvée, par exemple, dans [4, chap. 6, prop. 6iii)]. Le flot d'un tel champ est un flot produit, d'où suit que ψ conjugue σ à un automorphisme produit dans $\mathrm{PGL}(2) \times \mathrm{PGL}(2)$. On peut donc supposer $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$, avec $\sigma_i \in \mathrm{PGL}(2)$.

Puisque σ préserve les deux fibrations de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, sa puissance $m-$ième stabilise chaque fibre de celles-ci. Donc $\sigma^m = id$, car

$$\{(x, y)\} = (\mathbb{P}^1 \times \{y\}) \cap (\{x\} \times \mathbb{P}^1), \forall\ (x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Pour finir on montre qu'un automorphisme $\psi : X \to X$ qui préserve une fibration elliptique $f : X \to B$ et stabilise une courbe C_0 de genre > 1 est d'ordre fini ; ceci empêche que F soit comme dans iii) d'où la fin de la démonstration.

De la classification de Kodaira des fibrations elliptiques suit que C_0 n'est pas contenue dans une fibre de f. On en conclut qu'une puissance de ψ induit un automorphisme sur chaque fibre lisse de f avec des points fixes, d'où l'assertion. $\square$

Pour démontrer que $\lambda(F) = 1$ dans le théorème 1.1 on va se servir du résultat ci-dessous dû à Calstelnuovo [5] qui se trouve aussi dans [12, Chap. VIII, §2, No. 467] et [6, Book IV, chap. VII, §3, Them. 14]). On rappelle qu'une transformation de Cremona est dite de de Jonquières si elle préserve un pinceau de droites ; dans [17] nous faisons un exposé de ce travail.

Théorème 2.2 (G. Castelnuovo)**.** *Supposons que $g(C) > 1$. Soit $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une transformation de Cremona qui fixe les points de C. Alors F est d'ordre fini ou elle est conjuguée à une transformation de de Jonquières.*

En fait l'énoncé de Castelnuovo donne plus de précisions sur l'ordre de F dans le cas où elle n'est pas conjuguée à une transformation de de Jonquières, mais nous n'avons pas besoin de cela.

Preuve du théorème 1.1. (a) Puisque $\lambda(F^\ell) = \lambda(F)^\ell$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et $g(C) > 1$ on peut supposer que F fixe les points de C. Par le théorème de Castelnuovo et la proposition 2.1(b) il suffit de montrer que si F préserve un pinceau de droites, alors $\lambda(F) = 1$. Quitte à éclater le point base du pinceau de droites F est conjuguée à une application birationnelle $\varphi : \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$, où $\mathbb{F}_1$ désigne la première surface de Hirzebruch, qui préserve la fibration rationnelle. En coordonnées affines on peut écrire φ comme une application birationnelle de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$(x, y) \mapsto (x, \frac{a(x)y + b(x)}{c(x)y + d(x)}), \tag{2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}(x)$ d'où suit que $\lambda(F) = 1$ (de nouveau) par ([3] ou [8, lem. 4.2]).

Les assertions (b) et (c) suivent directement de la proposition 2.1. $\square$

Remarque 2.3. Qu'une transformation de de Jonquières soit conjuguée à une application comme dans l'équation (2) est un fait bien connu des géomètres classiques : voir par exemple [16, Chap. VI, §I.3].

Exemple 2.4. Pour donner un exemple de transformation de Cremona $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ avec $\lambda(F) > 1$ il suffit de considérer des transformations monomiales (voir [9]). On définit $F : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ par

$$F = (xy, xy^2);$$

on constate sans effort que $F^{-1} = (x^2y^{-1}, x^{-1}y)$. Par ailleurs F preséve le tore réel d'équation $|x| = |y| = 1$. Puisque la matrice des exposants

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de F possède des valeurs propres dont le module est plus grand que 1 nous concluons que l'*Entropie Topologique* de celle-ci est positive et donc $\lambda(F) > 1$ (voir [11]).

Observons que cette transformation possède un point fixe en $(1, 1)$; quitte à conjuguer avec une transformation quadratique qui collapse une droite sur ce point fixe on obtient un exemple de transformation avec $\lambda > 1$ qui stabilise une courbe rationnelle ; une telle transformation quadratique peut s'obtenir à partir de la transformation quadratique *Standard* $S : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, définie par

$$S = (yz : xz : xy),$$

par un changement (linéaire) de variables adéquat.

Question Existe-t-il des transformations de Cremona stabilisant une courbe elliptique avec degré dynamique plus grand que 1 ?

Références

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves, Volume I*, Springer, 1985.

[2] L. Bayle, A. Beauville, *Birational Involutions of* $\mathbb{P}^2$, Asian J. Math., 4(1), 11-18 (2000).

[3] M.P.Bellon, Algebraic entropy of birational maps with invariant curves, *Lett. Math. Phys.*, 50, pags. 79-90 (1999).

[4] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliations*, First Latin American Congress of Mathematics (2000).

[5] G. Castelnuovo, *Sulle transformazioni cremoniane del piano che ammetono una curva fisse*, Rend. Accad. Lincei (1892) ; Memoire scelte, Bologne, Zanichelli (1937).

[6] J. L. Coolidge, *A Treatise on Algebraic Curves*, Dover Publications, Inc., 1959.

[7] Doehlemann, *Ueber Cremona-Transformationen in der Ebene...*, Math. Ann., t. XXXIX, (1890).

[8] J. Diller, C. Favre, *Dynamics of Bimeromorphic maps of surfaces*, Ame. Mat. J. 123 (2001), 1135-1169.

[9] C. Favre, *Les applications monomiales en deux dimensions*, prépublication.

[10] T. de Fernex, L. Ein, *Resolution of indeterminacy os pairs*, Algebraic Geometry, de Grutier, (2002), 165-177.

[11] Friedland, *Entropy of algebraic maps.* Proceedings of the Conference in honor od Jean-Pierre Kohane (Orsay 1993), J. Fourier Anal. Appl. (1995), 215-228.

[12] L. Godeaux, *Géométrie algébrique II, géométrie sur une courbe algébrique, géométrie algébrique du plan*, Masson & Cie, éditeurs, Paris (1950).

[13] M.H.Gizatullin, *The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry*, Algebraic Geometry and its Applications, Aspects of Mathematics, E, vol. 25 (1994), 39-45.

[14] M. H. Gizatullin, *Rational G-surfaces*,

[15] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[16] H. Hudson, *Cremona Transformations in the plan and the space*, Cambridge University Press, 1927.

[17] I. Pan, *Sur un théorème de Castelnuovo*, Prépublication (2005).

[18] A. Russakovskii, B. Shiffman, *Value distribution for sequence of rational mappings and Complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 897-932.

Ivan Pan, Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre,RS, Brasil

E-mail address: pan@mat.ufrgs.br