

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

IVAN PAN, MARCOS SEBASTIANI

*Classification des feuilletages turbulents*

Tome XII, n° 3 (2003), p. 395-414.

<[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2003\\_6\\_12\\_3\\_395\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2003_6_12_3_395_0)>

© Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques,  
2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Classification des feuilletages turbulents<sup>(\*)</sup>

IVAN PAN<sup>(1)</sup>, MARCOS SEBASTIANI<sup>(2)</sup>

**RÉSUMÉ.** — Soit  $h : X \rightarrow B$  une fibration elliptique relativement minimale. On démontre que l'ensemble des feuilletages turbulents sur  $X$  (dans le sens de Brunella) dont le diviseur de tangence avec la fibration est donné, possède une structure naturelle de variété analytique connexe ; on calcule la dimension de cette variété.

**ABSTRACT.** — Let  $h : X \rightarrow B$  be a relatively minimal elliptic fibration. We proof that the set of turbulent foliations on  $X$  (on Brunella's sense) which has a fixed tangence divisor with the fibration is, in a natural way, a connected analytic variety ; we also calculate its dimension.

## 1. Introduction

Soit  $h : X \rightarrow B$  une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe  $X$ . Soit  $\Lambda$  un feuilletage turbulent de  $X$  avec fibration adaptée  $h$  (cette notion a été introduite par M. Brunella dans [3, chap. 4, §3] ; voir aussi [2, §5]). Notons  $D$  le diviseur de tangence de  $\Lambda$  avec le feuilletage  $\Gamma$  défini par la fibration  $h$  (voir [2, §1]).

On considère la famille  $\mathcal{F}_\Lambda$  des feuilletages analytiques à singularités isolées de  $X$  dont le diviseur de tangence avec  $\Gamma$  est encore  $D$  (ces feuilletages sont aussi turbulents avec fibration adaptée  $h$ ).

Soient  $T$  le fibré tangent à  $\Lambda$  ([5, §2]) et  $T_X$  le fibré tangent à  $X$ . Alors  $\mathcal{F}_\Lambda$  s'identifie de façon naturelle avec un sous-ensemble de l'espace projectif  $\mathbb{P}(\text{Hom}(T, T_X))$  associé à l'espace vectoriel des homomorphismes de  $T$

(\*) Reçu le 2 décembre 2002, accepté le 8 janvier 2003

(1) Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre, RS, Brasil.

E-mail: pan@mat.ufrgs.br

(2) Instituto de Matemática, UFRGS, av. Bento Gonçalves 9500, 91540-000 Porto Alegre, RS, Brasil.

E-mail: sebast@mat.ufrgs.br

dans  $T_X$  ([5, §2] et lemme 3.5 plus bas). Dans ce qui suit on démontre, en introduisant un invariant qui classifie les éléments de  $\mathcal{F}_\Lambda$ , que l'adhérence de  $\mathcal{F}_\Lambda$  dans  $\mathbb{P}(\text{Hom}(T, T_X))$  est un sous-espace linéaire dont on calcule explicitement la dimension en termes de  $D$  (théorème 5.4, corollaire 5.5 et propositions 6.5 et 6.6).

Cela généralise [4] en suivant les orientations d'Étienne Ghys à qui nous exprimons ici notre reconnaissance.

## 2. Notations

Soit  $X$  une variété analytique complexe et soit  $\mathcal{O}_X$  son faisceau structural. Si  $E$  est un fibré vectoriel holomorphe sur  $X$ , on note  $\mathcal{O}_X(E)$  le  $\mathcal{O}_X$ -module de ses sections holomorphes. Si  $D$  est un diviseur de  $X$ , on note  $\mathcal{O}_X(D)$  le  $\mathcal{O}_X$ -module dont les sections sur un ouvert  $U \subset X$  sont les fonctions méromorphes  $f$  sur  $U$  telles que  $\text{div } f + D|_U \geq 0$ . On peut associer à  $D$  un fibré vectoriel holomorphe  $E_D$  de rang 1 tel que  $\mathcal{O}_X(E_D) \cong \mathcal{O}_X(D)$ . Si  $\mathcal{A}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module et  $D$  un diviseur de  $X$  on note

$$\mathcal{A}(D) := \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D).$$

La *caractéristique d'Euler-Poincaré arithmétique* de  $X$  est

$$\chi(X) := \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} H^j(X, \mathcal{O}_X), \quad (X \text{ compacte}).$$

On désigne par  $K_X$  le fibré canonique de  $X$ . Si  $E$  est un fibré vectoriel sur  $X$ , on dénote  $E_x$  la fibre sur  $x \in X$ . Si  $Z$  est un espace analytique irréductible,  $\mathbb{C}[Z]$  et  $\mathbb{C}(Z)$  désignent l'anneau des fonctions holomorphes et le corps des fonctions méromorphes sur  $Z$  respectivement.

Finalement, si  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$  et  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel on note  $\mathbb{P}(V) := (V - \{0\})/\mathbb{C}^*$  l'espace projectif associé à  $V$ .

Le foncteur « image réciproque » sera considéré dans le sens de [1, chap. I, §8].

## 3. Feuilletages analytiques des surfaces

Soit  $X$  une surface analytique complexe connexe. Un *feuilletage analytique*  $\Lambda$  de  $X$  est défini par un couple  $(T, \varphi)$  où  $T$  est un fibré vectoriel holomorphe de dimension 1 sur  $X$  et  $\varphi : T \rightarrow T_X$  est un homomorphisme non-nul. Un autre couple  $(T', \varphi')$  définit aussi  $\Lambda$  si et seulement s'il existe un isomorphisme  $\theta : T \rightarrow T'$  tel que  $\varphi = \varphi' \circ \theta$ . C'est-à-dire, dans le cas

où  $T = T'$ , si et seulement s'il existe  $g : X \rightarrow \mathbb{C}^*$  holomorphe telle que  $\varphi|T_x = g(x)\varphi'|T_x$  pour tout  $x \in X$ .

L'ensemble singulier de  $\Lambda$  est l'ensemble

$$\text{Sing } \Lambda := \{x \in X : \varphi|T_x = 0\}.$$

C'est un sous-ensemble analytique de dimension  $\leq 1$ . Si  $\dim \text{Sing } \Lambda = 0$  ou  $\text{Sing } \Lambda = \emptyset$ , on dit que  $\Lambda$  est à singularités isolées (voir [5, §1]).

**LEMME 3.1.** — *Supposons que  $X$  est compacte et soient  $\Lambda = (T, \varphi), \Lambda' = (T, \varphi')$  deux feuilletages de  $X$ . Supposons de plus que :*

- a)  $\Lambda$  est à singularités isolées ;
- b) il existe un ouvert non-vide  $U \subset X$  tel que  $\varphi(T_x) = \varphi'(T_x)$  pour tout  $x \in U$ .  
Alors  $\Lambda = \Lambda'$ .

*Preuve.* — Considérons l'ouvert

$$V := X - [(\text{Sing } \Lambda) \cup (\text{Sing } \Lambda')].$$

On peut supposer  $U \subset V$ . Les images des homomorphismes  $\varphi, \varphi'$  définissent deux sections holomorphes du fibré en droites projectives associé à  $T_V$ . Comme ces sections coïncident au-dessus de  $U$ , elles sont identiques. Donc, il existe  $g : V \rightarrow \mathbb{C}^*$  holomorphe telle que

$$\varphi'|T_x = g(x)\varphi|T_x, \quad x \in V.$$

Soit  $a \in X - V$ . Si  $U_a$  est un voisinage ouvert de  $a$  tel qu'il existe une section holomorphe et jamais nulle  $s$  de  $T$  sur  $U_a$ , alors

$$\varphi'(s(x)) = g(x)\varphi(s(x)), \quad x \in U_a \cap V.$$

L'hypothèse a) implique que la restriction de  $g$  à  $U_a \cap V$  se prolonge à une fonction holomorphe sur  $U_a$ . On en déduit que  $g$  se prolonge à une fonction holomorphe sur  $X$  tout entier. Donc  $g$  est constante.  $\square$

**DÉFINITION 3.2.** — *Soit  $\Lambda = (T, \varphi)$  un feuilletage analytique de  $X$ . Notons*

$$\varphi_* : \mathcal{O}_X(T) \rightarrow \mathcal{O}_X(T_X) =: \xi_X, \quad \varphi^* : \Omega_X := \mathcal{O}_X(T_X^\vee) \rightarrow \mathcal{O}_X(T^\vee)$$

*les homomorphismes des faisceaux induits par  $\varphi$ . On appelle*

$$T_\Lambda := \text{Im } \varphi_* \subset \xi_X \text{ et } \mathcal{N}_\Lambda^\vee := \text{Ker } \varphi^* \subset \Omega_X$$

les faisceaux tangent et conormal à  $\Lambda$  respectivement. (Ce sont des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang 1. Comme  $\varphi_*$  est injectif, on peut supposer  $T_\Lambda = \mathcal{O}_X(T)$ ). Les faisceaux cotangent et normal à  $\Lambda$  sont  $T_\Lambda^\vee$  et  $\mathcal{N}_\Lambda := (\mathcal{N}_\Lambda^\vee)^\vee$  respectivement.

LEMME 3.3. — Si  $\Lambda$  est à singularités isolées, alors

$$T_\Lambda^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Lambda^\vee \cong \mathcal{O}_X(K_X)$$

en tant que  $\mathcal{O}_X$ -modules.

Preuve. — Voir [3, chap. 2, §1].  $\square$

Dans ce qui suit, si  $\Lambda, \Gamma$  sont deux feuilletages de  $X$ , on dira qu'ils sont différents ( $\Lambda \neq \Gamma$ ) si leur restrictions à  $X - (\text{Sing } \Lambda \cup \text{Sing } \Gamma)$  ne sont pas identiques (comparer avec 3.1).

Soient  $\Lambda \neq \Gamma$  deux feuilletages de  $X$ . On a une application évidente

$$T_\Lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Gamma^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

C'est un homomorphisme injectif de  $\mathcal{O}_X$ -modules. Donc, son image est de la forme  $\mathcal{O}_X(-D)$  où  $D$  est un diviseur effectif.

DÉFINITION 3.4. —  $D =: \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$  est le diviseur de tangence de  $\Lambda$  et  $\Gamma$  ([2, §1]).

LEMME 3.5. — On a les assertions suivantes :

- a) Si  $\Lambda$  et  $\Gamma$  sont à singularités isolées, alors  $\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = \text{tang}(\Gamma, \Lambda)$ .
- b)  $\mathcal{O}_X(\text{tang}(\Lambda, \Gamma)) = T_\Lambda^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}_\Gamma$ .
- c) Si  $\Lambda_1 = (T_1, \varphi_1)$  et  $\Lambda_2 = (T_2, \varphi_2)$  sont des feuilletages différents de  $\Gamma$  tels que  $\text{tang}(\Lambda_1, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda_2, \Gamma)$ , alors  $T_1 \cong T_2$ .

Preuve. — L'assertion c) suit de b) tandis que celle-ci suit de la définition 3.4. Pour a) voir [2, §1].  $\square$

#### 4. Fibrations elliptiques

Soit  $h : X \rightarrow B$  une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe  $X$ . Pour chaque  $y \in B$ , on désigne par  $h^{-1}(y)$  l'ensemble analytique réduit, support de la fibre  $X_y$  de  $h$  sur  $y$  ; on pose

$$X_y = \sum_j k_{yj} C_{yj},$$

où les  $C_{yj}$  dénotent les composantes irréductibles de  $h^{-1}(y)$ . Notons  $m_y := \text{pgdc}_j\{k_{yj}\}$  la *multiplicité* de  $X_y$  ; posons  $k'_{yj} := k_{yj}/m_y$ .

DÉFINITION 4.1. — *On définit le diviseur effectif*

$$M := \sum_y \sum_j (k'_{yj} - 1) C_{yj}$$

*de  $X$  (voir [3, chap. 2, §3]).*

Par la suite  $\Gamma$  désignera le feuilletage défini par la fibration  $h$ .

LEMME 4.2. — *On a un isomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules*

$$\mathcal{T}_\Gamma \cong h^*[h_{*1}(\mathcal{O}_X)] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M).$$

*Preuve.* — Voir [3, chap. 2, §3].  $\square$

LEMME 4.3. —  *$h_{*1}(\mathcal{O}_X)$  est un  $\mathcal{O}_B$ -module localement libre de rang 1.*

*Preuve.* — Il suit de [1, cor. III, (11.2)] compte tenu du fait que la fibre générique est elliptique.  $\square$

LEMME 4.4. — *L'homomorphisme canonique  $\mathcal{O}_B \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X(M))$  obtenu par composition avec  $h$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_B$ -modules.*

*Preuve.* — Soit  $U \subset B$  un ouvert ; posons  $V := h^{-1}(U)$ . Comme  $h$  est propre et à fibres connexes, toute  $f \in \mathbb{C}(V)$  dont les pôles sont des composantes des fibres est de la forme  $f = g \circ h$  pour une  $g \in \mathbb{C}(U)$ . Si  $g$  a un pôle en  $y \in U$ , alors  $f$  a un pôle d'ordre  $\geq k_{yj}$  en  $C_{yj}$ . Puisque  $k_{yj} > k'_{yj} - 1$ , on voit que  $f \in H^0(V, \mathcal{O}_X(M))$  si et seulement si  $g \in H^0(U, \mathcal{O}_B)$ .  $\square$

LEMME 4.5. — *Soit  $y \in B$ . Alors il existe un ouvert  $U \subset B$  tel que  $y \in U$  et  $\mathcal{T}_\Gamma|V \cong \mathcal{O}_X(M)|V$  en tant que  $\mathcal{O}_V$ -modules, où  $V := h^{-1}(U)$ .*

*Preuve.* — Soit  $U \ni y$  un ouvert de  $B$  tel que  $h_{*1}(\mathcal{O}_X)|U \cong \mathcal{O}_U$  (lemme ). Alors

$$h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X))|V \cong \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|V,$$

et on applique le lemme 4.2.  $\square$

LEMME 4.6. — *On a un isomorphisme de  $\mathcal{O}_B$ -modules*

$$h_*(\mathcal{T}_\Gamma) \cong h_{*1}(\mathcal{O}_X).$$

*Preuve.* — Soit  $U \subset B$  un ouvert ; posons  $V := h^{-1}(U)$ . L’application

$$H^0(U, h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \rightarrow H^0(V, h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M))$$

définie par  $s \mapsto h^*(s) \otimes 1$  induit un homomorphisme de  $\mathcal{O}_B$ -modules

$$h_{*1}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow h_*(h^*(h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(M))$$

qui est un isomorphisme d’après les lemmes 4.3 et 4.4.

L’assertion suit du lemme 4.2. □

**LEMME 4.7.** — *Pour tout  $y \in B$  il existe un voisinage ouvert  $U \subset B$  de  $y$  et un champ de vecteurs holomorphe  $v$  sur  $V := h^{-1}(U)$  tangent aux fibres de  $h$  tel que :*

- a)  *$v$  s’annule sur  $C_{yj}$  avec multiplicité  $k'_{yj} - 1$  ;*
- b) *si  $w$  est un champ de vecteurs holomorphe sur  $V$  tangent aux fibres de  $h$ , alors  $w = (g \circ h)v$  pour une  $g \in \mathbb{C}[U]$  ;*
- c)  *$v$  ne s’annule pas sur  $V - h^{-1}(y)$ .*

*Preuve.* — On choisit  $U$  comme dans le lemme 4.5 ; on a  $T_\Gamma|V \cong \mathcal{O}_X(M)|_V$ . D’après le lemme 4.4,  $H^0(V, \mathcal{O}_V(M))$  est engendré par 1 comme  $H^0(U, \mathcal{O}_B) = \mathbb{C}[U]$ -module. En tant que section de  $\mathcal{O}_X(M)$  sur  $V$ , l’élément 1 s’annule sur  $C_{yj}$  avec multiplicité  $k'_{yj} - 1$ . Donc  $H^0(V, T_\Gamma)$  est engendré, en tant que  $\mathbb{C}[U]$ -module, par une section qui s’annule sur  $C_{yj}$  avec cette multiplicité. □

## 5. Feuilletages turbulents

Soit  $h : X \rightarrow B$  une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte connexe  $X$  ; désignons par  $\Gamma$  le feuilletage associé à  $h$ . Soit  $\Lambda = (T, \varphi)$  un feuilletage turbulent de  $X$  avec fibration adaptée  $h$  (dans le sens de [3, chap. 4, §3] ; en particulier  $\Lambda$  est à singularités isolées). Alors le diviseur de tangence  $D := \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$  est de la forme

$$D = \sum_{y,j} t_{yj} C_{yj}$$

où les  $t_{yj}$  sont des entiers  $\geq 0$  (on garde les notations du §4).

**DÉFINITION 5.1.** — *On définit le diviseur effectif*

$$R := \sum_{y \in B} r_y \cdot y$$

de  $B$  par

$$r_y := \inf_j \left[ \frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet dénote la « partie entière » d'un nombre rationnel.

Observons que  $R$  ne dépend que de  $D$ .

Considérons maintenant l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules

$$\mu : h^*(\Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) = (\mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma)(D)$$

défini par

$$h^*(\omega \otimes v) \mapsto h^*(\omega) \otimes v \otimes 1,$$

où  $\omega \in H^0(U, \Omega_B(R))$  et  $v \in H^0(V, \mathcal{T}_\Gamma)$  avec  $U$  un ouvert de  $B$  et  $V = h^{-1}(U)$ . Observons que  $\omega$  a, au plus, un pôle d'ordre  $\leq r_y$  en  $y \in U$ . Alors  $h^*(\omega)$  a un pôle d'ordre  $\leq k_{yj}r_y - (k_{yj} - 1)$  le long de  $C_{yj}$ . Donc, d'après le lemme 4.7,  $h^*(\omega) \otimes v$  a un pôle le long de  $C_{yj}$  d'ordre, au plus

$$\begin{aligned} k_{yj}r_y - (k_{yj} - 1) - (k'_{yj} - 1) &= k_{yj}r_y - (k_{yj} + k'_{yj} - 2) \\ &\leq t_{yj}. \end{aligned}$$

Du fait que tous les faisceaux en question sont localement libres on déduit tout de suite que  $\mu$  est injectif.

D'autre part, considérons l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules

$$\lambda : (\mathcal{N}_\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_\Gamma)(D) \longrightarrow \mathcal{H}om(T, T_X)$$

défini par

$$\lambda(\eta \otimes v)(s) = \eta(\varphi(s)) \cdot v,$$

où  $\eta$  est une 1-forme méromorphe sur un ouvert  $V \subset X$  nulle sur les fibres de  $h$  et telle que  $f\eta$  est holomorphe si  $f \in H^0(V, \mathcal{O}_X(-D))$ ,  $v$  est un champ de vecteurs holomorphe sur  $V$  tangent aux fibres de  $h$  et  $s$  est une section holomorphe de  $T$  au-dessus de  $V$ . Observons que  $\eta(\varphi(s))$  est holomorphe par définition de  $D$ .

Comme  $\Lambda \neq \Gamma$ , le lemme 3.1 nous dit que  $\lambda$  est injectif.

Finalement,  $\lambda \circ \mu$  induit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire injective au niveau des sections globales

$$(\lambda \circ \mu)_* : H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{H}om(T, T_X).$$

DÉFINITION 5.2. — Posons  $E(D) := H^0(B, \Omega_B(R) \otimes h_*(\mathcal{T}_\Gamma))$ . Pour chaque  $\alpha \in E(D)$  on définit le feuilletage de  $X$  suivant :

$$\Lambda_\alpha := (T, \varphi_\alpha), \text{ où } \varphi_\alpha := \varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha).$$

Remarque 5.3. — Comme  $\Lambda$  est génériquement transverse aux fibres de  $h$ , on voit tout de suite que  $\varphi_\alpha \neq 0$  et que  $\Lambda_\alpha \neq \Gamma$ . En effet, par définition, pour tout  $\alpha \in E(D)$  l'image de l'homomorphisme  $(\lambda \circ \mu)_*(\alpha) : T \rightarrow T_X$  est engendré par des vecteurs tangents aux fibres de  $h$ .

THÉORÈME 5.4. — On a les assertions suivantes :

- a) Pour tout  $\alpha \in E(D)$  on a  $\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = D$  ; en particulier si  $\Lambda_\alpha$  est à singularités isolées, alors  $\Lambda_\alpha$  est turbulent avec fibration adaptée  $h$ .
- b) Si  $\alpha, \beta \in E(D)$  avec  $\alpha \neq \beta$ , alors  $\Lambda_\alpha \neq \Lambda_\beta$ .
- c) Si  $\Lambda'$  est un feuilletage turbulent de  $X$  avec fibration adaptée  $h$  tel que  $\text{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$ , alors il existe  $\alpha \in E(D)$  tel que  $\Lambda_\alpha = \Lambda'$ .
- d) L'ensemble des  $\alpha \in E(D)$  tels que  $\Lambda_\alpha$  est à singularités isolées est le complémentaire de la réunion d'un nombre fini de sous-variétés linéaires propres.

Preuve. — a) Soit  $U \subset X$  un ouvert et soient  $s$  et  $\omega$  des sections holomorphes de  $T$  et  $\mathcal{N}_\Gamma^\vee$  au-dessus de  $U$  respectivement. Comme  $(\lambda \circ \mu)_*(\alpha)(s)$  est un champ de vecteurs sur  $U$  tangent aux fibres de  $h$ , on a  $\omega(\varphi(s)) = \omega(\varphi_\alpha(s))$ . Alors

$$\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

- b) Si  $\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta$ , alors il existe  $c \in \mathbb{C}^*$  tel que

$$\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha) = c(\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(\beta)),$$

d'où suit

$$(1 - c)\varphi = (\lambda \circ \mu)_*(c\beta - \alpha).$$

Or, prenons  $y \in B$  en sorte que  $X_y$  soit une fibre régulière transverse à  $\Lambda$ . Si  $x \in h^{-1}(y)$ , alors pour tout  $u \in T_x$  le vecteur  $(1 - c)\varphi(u)$  est au même temps transverse et tangent à  $h^{-1}(y)$ , d'après la dernière égalité. Donc  $c = 1$ . Puisque  $(\lambda \circ \mu)_*$  est injectif, on en déduit  $\alpha = \beta$ .

c) On va définir  $\alpha$  localement au voisinage, disons  $U$ , d'un point  $y \in B$ . On peut supposer qu'il existe sur  $V := h^{-1}(U)$  un champ de vecteurs holomorphe  $v$  qui s'annule sur  $C_{yj}$  avec multiplicité  $k'_{yj} - 1$  et qui est tangent aux fibres de  $h$  (lemme 4.7a).

Soit  $u$  un champ de vecteurs holomorphe et jamais nul sur  $U$ . Si  $U$  est suffisamment petit,  $u|(U - \{y\})$  se relève à deux champs de vecteurs holomorphes  $w, w'$  sur  $V - h^{-1}(y)$  tangents à  $\Lambda, \Lambda'$  respectivement. Il en résulte

$$w' - w = f \cdot v |(V - h^{-1}(y)), f \in \mathbb{C}(V).$$

Comme  $h$  est propre et  $f$  holomorphe sur  $V - h^{-1}(y)$  on peut écrire  $f = g \circ h$  pour une fonction méromorphe  $g \in \mathbb{C}(U)$ . On définit une 1-forme méromorphe  $\omega$  sur  $U$  par

$$\omega(u) = g.$$

C'est-à-dire :

$$w' = w + h^*(\omega)(w) \cdot v,$$

sur  $V - h^{-1}(y)$ .

*Affirmation.* — Supposons que  $g$  a un pôle d'ordre  $r$  en  $y$ . Alors  $r \leq r_y$ .

On définit

$$\alpha|U := \omega \otimes v.$$

Il découle du lemme 4.7 et de l'affirmation ci-dessus que  $\alpha$  est bien définie comme section de  $\Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$ .

On va prouver que  $\Lambda_\alpha = \Lambda'$ . Par le lemme 3.5c on peut supposer  $\Lambda' = (T, \varphi')$ . D'après le lemme 3.1, il suffit de prouver que  $\varphi_\alpha(T_x) = \varphi'(T_x)$  pour tout  $x \in V - h^{-1}(y)$  dans le cas où  $X_y$  est une fibre régulière transverse à  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ . Dans ce cas  $w$  et  $w'$  sont holomorphes sur  $V$  et  $\omega$  est holomorphe sur  $U$ . Le champ  $w$  définit une section holomorphe jamais nulle  $s$  de  $T|V$  telle que  $\varphi(s) = w$ . Alors,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(s) &= \varphi(s) + (\lambda \circ \mu)_*(\alpha)(s) \\ &= w + \lambda_*(\mu_*(\alpha))(s) \\ &= w + h^*(\omega)(\varphi(s)) \cdot v \\ &= w + h^*(\omega)(w) \cdot v \\ &= w'. \end{aligned}$$

On en déduit l'assertion.

*Preuve de l'affirmation.* — Soient  $\xi, \eta$  des coordonnées locales de  $X$  centrées en un point générique de  $C_{yy}$  ; pour simplifier écrivons  $C = C_{yy}$  et  $k = k_{yy}$ ,  $k' = k'_{yy}$ ,  $t = t_{yy}$  et  $r' = r_y$  : on va montrer  $r \leq r'$ . Soit  $z$  une coordonnée locale de  $B$  centrée en  $y$ . On peut supposer que  $h$  s'exprime en coordonnées locales par  $z = \xi^k$ .

Par ailleurs on prend  $u = \partial/\partial z$ . On a

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{dz}{d\xi} \frac{\partial}{\partial z} = k\xi^{k-1} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Donc on peut écrire

$$w = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + c(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

et

$$w' = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + c'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

où  $c, c'$  sont holomorphes si  $\xi \neq 0$  avec, au plus, un pôle en  $\xi = 0$ .

D'autre part,

$$v = \epsilon \xi^{k'-1} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

où  $\epsilon$  est holomorphe et non-nulle. Nous devons prouver

$$kr \leq t + k + k' - 2.$$

Supposons d'abord que  $t = 0$ . Comme par hypothèse  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  ont le même diviseur de tangence avec  $\Gamma$ , ces deux feuilletages sont transverses à  $C$  au voisinage du point considéré. Cela implique que  $c$  et  $c'$  ont, au plus, un pôle d'ordre  $k-1$  en  $\xi = 0$ . Puisque

$$\begin{aligned} w' - w &= (c'(\xi, \eta) - c(\xi, \eta)) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= [(c'(\xi, \eta) - c(\xi, \eta)) \xi^{1-k'} \epsilon^{-1}] \cdot v, \end{aligned}$$

on a que  $f$  a, au plus, un pôle d'ordre  $k+k'-2$  le long de  $C$  ; mais l'ordre de ce pôle est  $kr$ .

Supposons maintenant  $t \neq 0$ . Donc, ni  $\Lambda$  ni  $\Lambda'$  ne sont transverses à  $C$  au voisinage du point considéré ; d'où qu'il existe des entiers  $p, q > k-1$  tels que

$$w = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^{-p} b(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

et

$$w' = k^{-1}\xi^{1-k} \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^{-q} b'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

pour des fonctions holomorphes  $b, b'$  qui ne s'annulent pas sur  $\xi = 0$ . Alors  $\xi^p w$  et  $\xi^q w'$  sont des champs de vecteurs tangents à  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  respectivement, qui ne s'annulent pas sur  $C$ . Comme  $\Gamma$  est localement défini par  $d\xi = 0$  et

$$d\xi(\xi^p w) = k^{-1} \xi^{1-k+p}, \quad d\xi(\xi^q w') = k^{-1} \xi^{1-k+q},$$

l'hypothèse  $\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$ , entraîne

$$t = 1 - k + p = 1 - k + q,$$

d'où  $p = q$ . Alors

$$\begin{aligned} w' - w &= \xi^{-q} (b'(\xi, \eta) - b(\xi, \eta)) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &= \left[ \xi^{-q} (b'(\xi, \eta) - b(\xi, \eta)) \epsilon^{-1} \xi^{1-k'} \right] \cdot v. \end{aligned}$$

Donc  $f$  a, au plus, un pôle d'ordre  $k' - 1 + q$  sur  $C$ . Comme ce pôle est d'ordre  $rk$  on en déduit

$$rk \leq k' - 1 + q = k + k' + t - 2.$$

d) Puisque  $\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = D$ , on a que  $\text{Sing } \Lambda_\alpha \subset \text{Supp}(D)$ . Il suffit, donc, de prouver que si  $Y$  est une composante irréductible de  $\text{Supp}(D)$ , alors l'ensemble

$$A_Y := \{\alpha \in E(D) : Y \subset \text{Sing } \Lambda_\alpha\}$$

est une sous-variété linéaire de  $E(D)$  ( $\Lambda \notin A_Y$ ).

Supposons  $A_Y$  non-vide et soit  $\alpha_0 \in A_Y$ . Alors  $\alpha \in A_Y$  si et seulement si

$$((\lambda \circ \mu)_*(\alpha) - (\lambda \circ \mu)_*(\alpha_0))|_Y = 0.$$

C'est-à-dire  $A_Y = \alpha_0 + E_Y$  où

$$E_Y := \{\alpha \in E(D) : (\lambda \circ \mu)_*(\alpha)|_Y = 0\},$$

est un sous-espace vectoriel de  $E(D)$ .  $\square$

**COROLLAIRE 5.5.** — *L'ensemble des feuilletages à singularités isolées  $\Lambda'$  de  $X$  tels que  $\Lambda' \neq \Gamma$  et  $\text{tang}(\Lambda', \Gamma) = D$  s'identifie naturellement à un sous-ensemble  $\mathcal{F}_\Lambda \subset \mathbb{P}(\text{Hom}(T, T_X))$  dont l'adhérence  $\overline{\mathcal{F}_\Lambda}$  est un sous-espace linéaire de dimension égale à  $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$ . En plus, les éléments de  $\overline{\mathcal{F}_\Lambda}$  différents de  $\Gamma$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{F}_\Lambda$  sont des feuilletages à singularités non-isolées et  $\overline{\mathcal{F}_\Lambda}$  est le complémentaire d'un nombre fini de sous-variétés linéaires dans  $\overline{\mathcal{F}_\Lambda}$ .*

*Preuve.* — D'une part d'après le théorème 5.4 on sait que

$$\overline{\mathcal{F}_\Lambda} = \mathbb{P}(\mathbb{C}\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(E(D))) ;$$

d'autre part, de l'injectivité de  $(\lambda \circ \mu)_*$  suit

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\varphi + (\lambda \circ \mu)_*(E(D))) = 1 + \dim_{\mathbb{C}} E(D) ;$$

La première assertion du corollaire en résulte.

Si  $\Lambda' \in \overline{\mathcal{F}_\Lambda}$  alors, par ce qui précède, ou bien  $\Lambda' = (T, \varphi_\alpha)$  ou bien  $\Lambda' = (T, (\lambda \circ \mu)_*(\alpha))$ , pour un  $\alpha \in E(D)$  convenable. Dans le premier cas, si  $\Lambda'$  est à singularités isolées,  $\Lambda' \in \mathcal{F}_\Lambda$  par le théorème 5.4a. Dans le deuxième cas,  $\Lambda'$  laisse invariantes les fibres de  $h$ . Alors si  $\Lambda' \neq \Gamma$ , on a que  $\Lambda'$  est à singularités non-isolées. La dernière assertion découle de ceci et du théorème 5.4d.  $\square$

*Exemple 5.6.* — Soit  $E$  une courbe elliptique et soit  $u \neq 0$  un champ de vecteurs holomorphe sur  $E$ . Considérons  $X := E \times E$  et dénotons  $p_1, p_2 : X \rightarrow E$  les projections canoniques ; posons  $B = E$ ,  $h = p_1$ . Finalement désignons par  $\Lambda$  le feuilletage défini par  $p_2$ . Si on considère la famille des feuilletages de  $X$  définis pas les champs de vecteurs  $((1-t)u, tu)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ , on constate que  $\Gamma \in \overline{\mathcal{F}_\Lambda}$ .

*Exemple 5.7.* — Considérons la même fibration de l'exemple 5.6. Soient  $v_1 = (u, 0)$ ,  $v_2 = (0, u)$ , des champs de vecteurs holomorphes sur  $X$ .

Fixons  $q \in B$  et soit  $F = h^{-1}(q)$ . Soit  $f \in \mathbb{C}(X)$ ,  $f \notin \mathbb{C}$ , avec  $\text{div}_\infty f = 2q$ . Soit  $\Lambda$  le feuilletage à singularités isolées défini par le champ méromorphe  $v_1 + fv_2$  (sur  $X$ ). Alors  $\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = 2F$ . On voit que tout  $\Lambda' \in \mathcal{F}_\Lambda$  est défini par un champ de la forme  $v_1 + gv_2$ ,  $g \in \mathbb{C}(B) \setminus \mathbb{C}$ , avec  $\text{div}_\infty g = 2q$ . On en déduit que

$$\dim \mathcal{F}_\Lambda = \dim \overline{\mathcal{F}_\Lambda} = 2.$$

On vérifie que  $\overline{\mathcal{F}_\Lambda} - \mathcal{F}_\Lambda$  est la réunion de deux droites dont l'une est formée par des feuilletages proportionnels à  $\Gamma$  et l'autre est l'adhérence d'une famille de feuilletages transverses à  $\Gamma$  en dehors de  $F$ , qui ont  $F$  comme ensemble singulier.

## 6. Calcul de $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$

On considère une fibration elliptique relativement minimale  $h : X \rightarrow B$  de la surface analytique compacte et connexe  $X$ . On suppose que les fibres

génériques de  $h$  sont isomorphes, ce qui est bien le cas lorsqu'il existe sur  $X$  un feuilletage turbulent de fibration adaptée  $h$ .

Comme au §4, pour tout  $y \in B$  on note  $X_y := \sum_j k_{yj} C_{yj}$  la fibre de  $y$ , où les  $C_{yj}$  sont les composantes irréductibles du *support*  $h^{-1}(y)$  de  $X_y$ . De même  $m_y$  est la multiplicité de  $X_y$  et  $k'_{yj} := k_{yj}/m_y$ .

On se donne aussi un feuilletage turbulent  $\Lambda$  de  $X$  avec fibration adaptée  $h$  et on note  $D := \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$  où  $\Gamma$  est le feuilletage défini par  $h$ . Comme au §5 on écrit  $D = \sum_{y,j} t_{yj} C_{yj}$  et on définit le diviseur effectif de  $B$

$$R := \sum_{y \in B} r_y y, \quad r_y = \inf_j \left[ \frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet indique la partie entière. Finalement on pose

$$E(D) = H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma))$$

(voir définitions 5.1 et 5.2).

Le problème est de calculer  $\dim_{\mathbb{C}} E(D)$ .

Dans le résultat suivant on se sert de la classification de Kodaira des fibrations elliptiques relativement minimales (voir [1, chap. V, §7])

**LEMME 6.1.** — *Les fibres singulières de  $h$  ne sont jamais du type  $I_b, I_b^*$  ou  $mI_b$ .*

*Preuve.* — Il suit du fait que les fibres régulières de  $h$  sont toutes isomorphes ([3, chap. 4, §3]).  $\square$

**COROLLAIRE 6.2.** — *Soit  $\sigma$  le cardinal de l'ensemble  $S$  des  $y \in B$  tels que  $h^{-1}(y)$  est une courbe singulière. Alors*

$$\chi(X) \leq \frac{5}{6}\sigma.$$

*Preuve.* — Soit  $e(X)$  la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de  $X$ . Puisque  $K_X \cdot K_X = 0$ , d'après la formule de Kodaira ([1, chap. V, thm. (12.1)]), on a que  $\chi(X) = e(X)/12$  par la formule de Nöther ([1, chap. I, thm. (5.4)]). Si  $h^{-1}(y)$  est une courbe non-singulière, alors  $e(h^{-1}(y)) = 0$  ([1, chap. V, §7]). On en déduit

$$e(X) = \sum_{y \in S} e(h^{-1}(y)).$$

Par ailleurs, si  $y \in S$ , de la classification de Kodaira suit que  $e(h^{-1}(y)) \leq 10$  en tenant compte du lemme 6.1. Donc  $e(X) \leq 10\sigma$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

**LEMME 6.3.** — *Soit  $y \in B$ . Si  $h^{-1}(y)$  est une courbe singulière, alors  $r_y > 0$ .*

*Preuve.* — Supposons d'abord  $m_y > 1$ . On est dans le cas  $mI_1$  de la classification de Kodaira. Comme  $h^{-1}(y)$  est irréductible et contient un point singulier, elle est contenue dans le support de  $D$ . Donc  $t_{y1} > 0$ , d'où

$$\frac{t_{y1} + k_{y1} + 1 - 2}{k_{y1}} \geq 1.$$

Supposons maintenant  $m_y = 1$ . Si  $k_{yj} > 1$  on a

$$\begin{aligned} \frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} &= \frac{t_{yj} + 2k_{yj} - 2}{k_{yj}} \\ &\geq 2 \frac{k_{yj} - 1}{k_{yj}} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Si  $k_{yj} = 1$ , il résulte des considérations de [3, chap. 4, §3] que  $C_{yj}$  est invariante par  $\Lambda$ . Donc  $t_{yj} \geq 1$ , d'où

$$\frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} = t_{yj} \geq 1.$$

$\square$

**LEMME 6.4.** — *On a  $0 \leq \chi(X) \leq \deg R$  avec  $\chi(X) = \deg R$  si et seulement si  $\chi(X) = \deg R = 0$ .*

*Preuve.* — En effet

$$\deg R \geq \sigma \geq \frac{6}{5}\chi(X).$$

Les deux premières inégalités suivent du corollaire et du lemme ; la dernière résulte de la proposition (12.2) et remarque précédente de [1, chap. V] et de [1, chap. III, thm. (18.2)].  $\square$

Notons  $g$  le genre de  $B$ .

**PROPOSITION 6.5.** — *On a*

$$\dim_{\mathbb{C}} E(D) = \deg R + g - 1 - \chi(X),$$

*à moins que  $\deg R = \chi(X) = 0$ .*

*Preuve.* — D'après le lemme 4.5 et le théorème de Riemann-Roch

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} E(D) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Omega_B \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)) \\ &= g - 1 + \deg R - \chi(X) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \mathcal{O}_B(-R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)^{\vee}),\end{aligned}$$

compte tenu du fait que  $\deg h_{*1}(\mathcal{O}_X)^{\vee} = \chi(X)$  ([1, chap. V, Prop. (12.2)]).

Or, par le corollaire

$$\deg(\mathcal{O}_B(-R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_{*1}(\mathcal{O}_X)^{\vee}) = \chi(X) - \deg R < 0,$$

à moins que  $\deg R = \chi(X) = 0$ , d'où l'assertion.  $\square$

**PROPOSITION 6.6.** — *Supposons  $\deg R = \chi(X) = 0$ . Alors  $\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g$  ou  $g - 1$  selon que sur  $X$  il existe ou pas de champ holomorphe de vecteurs tangents aux fibres de  $h$  et jamais nul.*

*Preuve.* — On observe que  $R = 0$  et on fait un calcul analogue à celui de la preuve de la proposition 6.5 ; on en déduit que  $\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g$  ou  $g - 1$  selon que  $h_{*1}(\mathcal{O}_X)$  soit ou ne soit pas isomorphe à  $\mathcal{O}_B$ . Mais  $h_{*1}(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_B$  équivaut à l'existence d'un champ holomorphe de vecteurs sur  $X$  tangent aux fibres de  $h$  et jamais nul, d'après les lemmes 4.5 et 4.7.  $\square$

*Remarque 6.7.* — a) Rappelons que  $\chi(X) = 0$  implique que toutes les fibres de  $h$  sont non-singulières (proposition (12.2) et remarque précédente de [1, chap. V] et [1, chap. III, Thm. (18.2)]).

b)  $\chi(X) = 0$  implique  $\deg h_{*1}(\mathcal{O}_X) = 0$  ([1, chap. V, Prop. (12.2)]). Donc, si  $g = 0$  l'égalité  $\chi(X) = 0$  implique  $h_{*1}(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_B$ . C'est-à-dire, si  $g = \chi(X) = 0$  il existe un champ de vecteurs holomorphe sur  $X$  jamais nul et tangent aux fibres de  $h$ .

*Exemple 6.8.* — Soit  $E$  un tore de dimension 1. Fixons une involution sans points fixes  $\iota$  de  $E$ . Considérons le quotient  $X$  de  $E \times E$  par l'opération de  $(e_1, e_2) \mapsto (\iota(e_1), -e_2)$ . La première projection  $E \times E \rightarrow E$  passe au quotient et définit une fibration elliptique localement triviale  $h : X \rightarrow B$ . Le feuilletage de  $E \times E$  défini par la deuxième projection  $E \times E \rightarrow E$  passe au quotient et définit un feuilletage  $\Lambda$  de  $X$  transverse à  $h$ . Par la proposition 6.6

$$\dim_{\mathbb{C}} E(D) = g - 1 = 0 ;$$

c'est-à-dire,  $\Lambda$  est le seul feuilletage de  $X$  transverse à  $h$ .

*Exemple 6.9.* — (voir [3, chap. 4, §3]) Soit  $E$  un tore de dimension 1. Notons  $X$  une désingularisation minimale du quotient de  $E \times E$  par l’involution  $(e_1, e_2) \mapsto (-e_1, -e_2)$ . La première projection  $E \times E \rightarrow E$  passe au quotient et définit une fibration elliptique  $h : X \rightarrow B$ , qui contient quatre fibres singulières  $X_{y_k}$ , pour  $k = 1, 2, 3, 4$ , toutes du type  $I_0^*$  dans la classification de Kodaira, et dont la base est rationnelle. Il en résulte que  $e(X) = 24$  et  $\chi(X) = 2$ . On note  $\Lambda$  un feuilletage de  $X$  avec fibration adaptée  $h$ .

Fixons un  $y_k$  et écrivons

$$X_{y_k} = 2C_5 + \sum_{j=1}^4 C_j ;$$

posons  $t_j := t_{y_k j}$ . Par construction chaque  $C_j$  est invariante par  $\Lambda$  ([3, chap. 4, §3]). Donc (voir [3, chap. 2, Prop. 3])

$$c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C_j = -2 + Z(\Lambda, C_j) \geq -1, \quad 1 \leq j \leq 4,$$

car  $Z(\Lambda, C_j) \geq 1$  par la formule de Camacho-Sad.

Si  $C_5$  est invariante par  $\Lambda$  on a de même

$$c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C_5 = -2 + Z(\Lambda, C_5) \geq 2,$$

car chaque point d’intersection de  $C_5$  avec l’une des  $C_j$  est un point singulier de  $\Lambda$ .

D’autre part, si  $C$  est une courbe irréductible contenue dans une fibre de  $h$  on a

$$\begin{aligned} D \cdot C &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{N}_\Gamma) \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{T}_\Gamma^\vee) \cdot C - K_X \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C + c_1(\mathcal{T}_\Gamma^\vee) \cdot C \\ &= c_1(\mathcal{T}_\Lambda^\vee) \cdot C - M \cdot C, \end{aligned}$$

d’après les lemmes 3.5b et 3.3, le lemme de Zariski ([1, chap. V, Thm. (12.1)]), le lemme 4.2 et la définition 4.1.

On en déduit

$$t_5 - 2t_j = D \cdot C_j \geq -2, \quad 1 \leq j \leq 4$$

et, lorsque  $C_5$  est invariante,

$$\sum_{j=1}^4 t_j - 2t_5 = D \cdot C_5 \geq 4.$$

Alors, si  $C_5$  n'est pas invariante :  $t_5 = 0$  et  $t_j = 1, 1 \leq j \leq 4$ . Si, en revanche,  $C_5$  est invariante, on obtient toute de suite que  $t_5 = 2t_j - 2, 1 \leq j \leq 4$ . Donc, en tous les cas

$$t_5 = 2t_j - 2, 1 \leq j \leq 4.$$

Finalement

$$r_{y_k} = \frac{t_5 + 2}{2}.$$

Supposons  $\Lambda$  transverse à toutes les fibres régulières de  $h$ . On obtient

$$\dim \overline{\mathcal{F}_\Lambda} = \frac{a+2}{2},$$

où on a posé  $a := \sum_{j=1}^4 t_{y_j} 5$ .

Observons que les  $t_{y_k} 5$  ( $1 \leq k \leq 4$ ) sont forcément pairs. Le cas où ceux-ci sont tous nuls résulte du feuilletage de  $E \times E$  défini par la deuxième projection canonique.

## 7. Existence de feuilletages turbulents

Soit  $h : X \rightarrow B$  une fibration elliptique relativement minimale de la surface analytique compacte et connexe  $X$  ; comme avant  $X_y$  désigne la fibre de  $h$  au-dessus du point  $y \in B$ . On suppose donnés  $y_1, \dots, y_n \in B$  et, pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , un voisinage ouvert  $U_i$  de  $y_i$  et un feuilletage à singularités isolées  $\Lambda_i$  de  $V_i := h^{-1}(U_i)$ , avec les conditions suivantes :

- a)  $U_1 \cup \dots \cup U_n = B$  ;
- b)  $X_y$  est régulière et transverse à  $\Lambda_i$  pour tout  $y \in U_i - \{y_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$  ;
- c) si  $X_{y_i}$  n'est pas régulière ou n'est pas transverse à  $\Lambda_i$ , alors  $y_i \notin U_k$  pour  $k \neq i$ .

Posons

$$X_i = X_{y_i} = \sum_j k_{ij} C_{ij},$$

où les  $C_{ij}$  sont les composantes irréductibles de  $h^{-1}(y_i)$ .

Soit  $\Gamma$  le feuilletage associé à  $h$  et soit  $\Gamma_i = \Gamma|V_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). On peut écrire alors

$$\text{tang}(\Lambda_i, \Gamma_i) = \sum_j t_{ij} C_{ij}.$$

Considérons le diviseur effectif de  $X$

$$D = \sum_{i,j} t_{ij} C_{ij}.$$

Soit  $m_i$  la multiplicité de  $X_i$  et posons  $k'_{ij} := k_{ij}/m_i$ . On définit le diviseur effectif  $R := \sum_{i=1}^n r_i y_i$  de  $B$  avec

$$r_y := \inf_j \left[ \frac{t_{yj} + k_{yj} + k'_{yj} - 2}{k_{yj}} \right],$$

où le crochet indique la partie entière.

**THÉORÈME 7.1.** — *Supposons que  $\deg R > 1 + \chi(X)$ . Alors, il existe un feuilletage turbulent  $\Lambda$  de  $X$ , avec fibration adaptée  $h$ , tel que*

$$\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

*Preuve.* — Soit  $y \in U_i \cap U_k$  avec  $i \neq k$ . Soit  $u$  un champ de vecteurs holomorphe sur un voisinage  $U \subset U_i \cap U_k$  de  $y$ . Alors  $u$  se relève à des champs holomorphes  $w_i, w_k$  sur  $h^{-1}(U)$  tangents à  $\Lambda_i, \Lambda_k$  respectivement. Donc,  $w_k - w_i$  est tangent à  $\Gamma$ . On voit toute de suite que ceci définit un 1-cocycle  $\{\xi_{ik}\}_{1 \leq i, k \leq n}$  du recouvrement  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$  à valeurs dans  $\Omega_B \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$ . On peut aussi le supposer à valeurs dans  $\mathcal{G} := \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma)$  par l'inclusion naturelle.

D'autre part, par hypothèse le degré du faisceau  $\mathcal{G}$  est  $> 2g - 2$  ([1, chap. V, Pro. 12.2]) ; d'où  $H^1(B, \mathcal{G}) = 0$ , par la dualité de Serre.

On en déduit que, pour un choix convenable du recouvrement  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$  il existe, pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , une 1-forme méromorphe  $\omega_i$  sur  $U_i$ , ayant, au plus, un pôle d'ordre  $r_i$  en  $y_i$ , avec la propriété

$$(\omega_i \otimes v_i - \omega_k \otimes v_k)|(U_i \cap U_k) = \xi_{ik},$$

où  $v_i$  est un champ holomorphe sur  $V_i$  tangent à  $\Gamma_i := \Gamma|V_i$  et s'annulant sur  $C_{ij}$  avec multiplicité  $k'_{ij} - 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ; on a utilisé le lemme 4.7.

Maintenant nous allons définir un nouveau feuilletage  $\Lambda'_i$  de  $V_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Soit  $w$  un champ de vecteurs holomorphe sur l'ouvert  $V \subset V_i$  et tangent à  $\Lambda_i$ . Alors  $\Lambda'_i|V$  est défini par le champ de vecteurs

$$w + h^*(\omega_i)(w) \cdot (v_i|V).$$

Un calcul direct montre que, d'après la définition de  $r_i$ , le champ de vecteurs  $\omega_i(w) \cdot (v|V)$  est holomorphe. On en déduit que  $\Lambda'_i$  est bien défini et tel que

$$\text{tang}(\Lambda'_i, \Gamma_i) = \text{tang}(\Lambda_i, \Gamma_i),$$

car  $v_i$  est tangent à  $\Gamma_i$ .

Par ailleurs, soit  $U \subset U_i \cap U_k$  ( $i \neq k$ ) et soit  $u$  un champ de vecteurs holomorphe sur  $U$ . Soient  $w_i, w_k$  des relèvements de  $u$  holomorphes sur  $h^{-1}(U)$  et tangents à  $\Lambda_i, \Lambda_k$  respectivement. Alors

$$\begin{aligned} w_k - w_i &= \omega_i(u)v_i - \omega_k(u)v_k \\ &= h^*(\omega_i)(w_i)v_i - h^*(\omega_k)(w_k)v_k \end{aligned}$$

sur  $h^{-1}(U)$ . Donc

$$w_i + h^*(\omega_i)(w_i)v_i = w_k + h^*(\omega_k)(w_k)v_k,$$

sur  $h^{-1}(U)$  d'où suit que  $\Lambda'_i$  et  $\Lambda'_k$  coïncident sur  $U_i \cap U_k$ . On en conclut que les  $\Lambda'_i$  se recollent et définissent un feuilletage  $\Lambda$  de  $X$  tel que

$$\text{tang}(\Lambda, \Gamma) = D.$$

Si  $\Lambda$  est à singularités isolées, on a fini. Sinon, observons que

$$E(D) = \Omega_B(R) \otimes_{\mathcal{O}_B} h_*(\mathcal{T}_\Gamma) \neq 0$$

(proposition 6.5). Alors, comme dans le théorème 5.4, on peut associer à chaque  $\alpha \in E(D)$  un feuilletage  $\Lambda_\alpha$  de  $X$  tel que  $\text{tang}(\Lambda_\alpha, \Gamma) = \text{tang}(\Lambda, \Gamma)$  ; le feuilletage  $\Lambda_\alpha$  est à singularités isolées pour  $\alpha$  convenable (théorème 5.4d).

□

## Bibliographie

- [1] BARTH (W.), PETERS (C.), VAN DE VEN (A.). — *Compact Complex Surfaces*, Springer Verlag, (1984).
- [2] BRUNELLA (M.). — Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, *Ann. Norm. Sup.*, 4<sup>a</sup> sér., t. 30, p. 569-594 (1997).
- [3] BRUNELLA (M.). — *Birational Geometry of Surfaces*, First Latin-American Congress, IMPA, (2000).
- [4] PAN (I.), SEBASTIANI (M.). — Feuilletages tourbillonnés sur les fibrés principaux elliptiques, pré-publication.
- [5] GOMEZ-MONT (X.). — Universal families of foliations by curves, *Astérisque*, 150-151, 109-129 (1987).