**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

*Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003*

# PRÁCTICO 9

1. Hallar la solución de la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en $\mathbb{R}$, con los datos iniciales $u(x,0) = e^{-x^2}$, $u_t(x,0) = xe^{-x^2}$. Graficar la solución en los instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

2. Mostrar que al resolver la ecuación de ondas para una cuerda infinita con datos iniciales $f$ y $g$ impares la solución $u$ satisface $u(0,t) = 0$, $\forall t \geq 0$.

3. Usar el ejercicio anterior para resolver el problema
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \geq 0 \\ u_t(x,0) = g(x) & x \geq 0 \end{cases}$$
suponiendo que $f \in C^2([0,\infty))$ y $g \in C^1([0,\infty))$ son funciones que se anulan en 0.

4. Por el método de propagación hallar una solución $u$ de la ecuación de ondas en $[0,l] \times \mathbb{R}$ tal que $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1 - \cos\frac{2\pi x}{l}$, $\forall x \in [0,l]$, y $u(0,t) = 0 = u(l,t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

5. Supongamos que $f \in C^2([0,l])$ y $g \in C^1([0,l])$ se anulan en los extremos del intervalo $[0,l]$. En la resolución hecha en clase de la ecuación de ondas con condiciones mixtas
$$(*) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = 0 = u(l,t) & t \geq 0 \end{cases}$$
se expresó la solución $u$ en la forma $u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct)$, donde las funciones $p$ y $q$ se obtenían primero en el intervalo $[0,l]$ usando las condiciones iniciales, y luego se extendían en sucesivas etapas a través de fórmulas deducidas de las condiciones de borde, que relacionan a $p$ y a $q$. Un método alternativo consiste en extender $f$ y $g$ respectivamente a funciones $\bar{f}$ y $\bar{g}$ que sean impares y con período $2l$, y luego mostrar que la solución de $(*)$ debe estar dada por
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\bar{f}(x+ct) + \bar{f}(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(y)dy \qquad (1)$$
Comprobar la afirmación anterior. Demostrar que $\bar{f} \in C^2(\mathbb{R})$ sii $f''(0) = 0 = f''(l)$, y que en este caso el problema $(*)$ tiene una única solución $u$, la cual está dada por (1).

6. Clasificar las siguientes ecuaciones según su tipo, y reducirlas a la correspondiente forma canónica:

   (i) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y$ (ii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 4 + 2u_x$

   (iii) $2u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = xyu$ (iv) $yu_{xx} + u_{yy} = 0$

7. Considérese el problema siguiente, donde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$:
$$(*) \begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^2), & \\ u_{xx} = u, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = f(y), & y \in \mathbb{R}, \\ u_x(0,y) = g(y), & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(a) Encontrar una solución de $(*)$, y probar que es única.

(b) Supóngase que $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ son acotadas y tales que $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \epsilon$, $\|g - \tilde{g}\|_\infty \leq \epsilon$, donde $\|h\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$. Sean $u$ y $\tilde{u}$ las correspondientes soluciones. Probar que $|u(x,y) - \tilde{u}(x,y)| \leq \epsilon(|\operatorname{sh} x| + |\operatorname{ch} x|)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.¿Qué implica esto sobre la dependencia de la solución con respecto a las condiciones iniciales?

8. *Ejemplo de Hadamard.* Mostrar que el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = 0, & y \in \mathbb{R}, \\ u_x(0,y) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} ny, & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

tiene una solución de la forma $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Probar que no es un problema bien puesto (comparando datos iniciales y soluciones con $\| \; \|_\infty$).

$\boxed{\text{Entregar el Ejercicio 1 y la parte (ii) del Ejercicio 6.}}$

**Fecha máxima de entrega: 1º de diciembre**.