Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 8

1. Dado el sistema $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3 \end{cases}$ observar que la aproximación lineal correspondiente no permite determinar la estabilidad del origen. Para esto buscar una función de Liapunov de la forma $V(x, y) = ax^{2n} + by^{2m}$.

2. En los siguientes sistemas de ecuaciones hallar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad:

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen}(2x + 2y) \\ \dot{y} = e^{x-y} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x^7 - y^4 \\ y' = -2x + 4z^3 - y^4 \\ z' = -y^4 - z^{27} \end{cases}$$

3. Verificar que el origen es un punto de equilibrio de cada uno de los siguientes sistemas, y a través de sus aproximaciones lineales averiguar, cuando sea posible, si dicho punto es estable:

$$\begin{cases} x' = y + 3x^2 \\ y' = x - 3y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \cos y - \operatorname{sen} x - 1 \\ y' = x - y - y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = e^{x+y} - 1 \\ y' = \operatorname{sen}(x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - y + z^2 \\ y' = y + z - x^2 \\ z' = z - x + y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = z \\ y' = -3x \\ z' = \alpha x + 2y - z \end{cases}$$

4. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $V \in C^2(\Omega)$. El *sistema gradiente* asociado a V es $(*)$ $x' = -\operatorname{grad} V(x)$.
   (a) Mostrar que $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$, y que $\dot{V}(x) = 0$ sii x es un punto singular de $\operatorname{grad} V$.
   (b) Si $\bar{x}$ es un mínimo aislado de V, entonces $\bar{x}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de $(*)$.
   (c) Analizar la estabilidad del origen para el sistema $\begin{cases} x' = -yz^2e^{xy} - 2x\operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ y' = -xz^2e^{xy} - 2y\operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ z' = -2ze^{xy} \end{cases}$
   ¿Es posible un análisis por la primera aproximación?

5. Sea $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ continua y de Lipschitz, tal que $f(x) = 0 \iff x = 0$. Mostrar que la solución nula de $x' = f(x)$ es estable sii $xf(x) < 0$, $\forall x \in [-a, a]$, $x \neq 0$. En ese caso la solución es asintóticamente estable, y $g(x) := \int_0^x -f(t)dt$ es una función de Liapunov definida positiva.

6. Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}^2(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.
   (a) Hallar los puntos de equilibrio y dibujar las órbitas. Verificar que 0 es estable pero no asintóticamente.
   (b) Probar que no existen funciones de Liapunov definidas positivas en un entorno de 0 con $\dot{V}$ semidefinida o definida negativa (luego el recíproco del primer teorema de Liapunov es falso).

7. La ecuación del movimiento de un sistema masa–resorte amortiguado es $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, donde m, k y c son números positivos. Transformar esta ecuación en una ecuación vectorial de primer orden y discutir su estabilidad según m, k y c.

8. Estudiar la estabilidad de la solución nula de la ecuación del péndulo con rozamiento:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \operatorname{sen} \theta - a\,\dot{\theta} \qquad\qquad (a > 0)$$

9. Considérese la ecuación $(*)$ $\ddot{x} + \alpha(x)\dot{x} + \beta(x) = 0$, donde $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R})$, $\alpha(x) > 0$ si $x \neq 0$, $x\beta(x) > 0$ si $x \neq 0$.

   (a) Llevar $(*)$ a su forma vectorial y mostrar que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio de la ecuación obtenida.

   (b) Probar que $V(x, y) := \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \beta(s)ds$ es una función de Liapunov y deducir que $(0, 0)$ es estable. ¿Se obtiene también alguna conclusión acerca de la estabilidad asintótica?

   (c) Linealizando el sistema, analizar la estabilidad del origen según $\alpha(0)$ y $\beta'(0)$.