Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 7

1. Sean $X = \mathbb{R}^n$ o $X = \mathbb{C}^n$, $\Omega \subseteq X$ abierto y $f : \Omega \to X$ continua y tal que para todo $x_0 \in X$ existe una única solución maximal del problema de valores iniciales $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$. Denotamos por I_{x_0} al intervalo de definición de dicha solución, y por $\varphi(t, x_0)$ a la solución evaluada en $t \in I_{x_0}$. Fijado $t \in \mathbb{R}$, sean $X_{-t} := \{x \in X : t \in I_x\}$ y $\varphi_t : X_{-t} \to X$ tal que $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$.

   (a) Probar que X_{-t} es un subconjunto abierto de X, y que $\varphi_t : X_{-t} \to X_t$ es un homeomorfismo cuya función inversa es φ_{-t}. Dar un ejemplo de ecuación diferencial en el que $X_t = X$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y otro en el que $X_t = X \iff t = 0$ (notar que siempre se tiene $X_0 = X$).

   (b) Sean $\mathcal{D}_- := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X : x \in X_{-t}\}$ y $\mathcal{D}_+ := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X : x \in X_t\}$. Probar que $\mathcal{D}_-$ y $\mathcal{D}_+$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R} \times X$, y que $\tilde{\varphi} : \mathcal{D}_- \to \mathcal{D}_+$ tal que $\tilde{\varphi}(t, x) = (t, \varphi(t, x))$ es un homeomorfismo.

   Concluir que el flujo $\varphi : \mathcal{D}_- \to X$ es una acción parcial continua de $\mathbb{R}$ sobre X, es decir: $\mathcal{D}_-$ es abierto en $\mathbb{R} \times X$, φ es continua, $\varphi_0 = Id_X$ y φ_{s+t} es una extensión de $\varphi_s \circ \varphi_t$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

2. Para las ecuaciones que siguen describir $\mathcal{D}_-$, X_{-t} y φ_t, según las notaciones del Ejercicio 1, y verificar que el flujo correspondiente es una acción parcial (ver el ejercicio anterior). Dibujar las órbitas en el plano de fases, hallar los puntos de equilibrio e investigar su estabilidad y estabilidad asintótica.

   $(a)\ x' = 1 \qquad (b)\ x' = e^{-x} \qquad (c)\ x' = x(1-x) \qquad (d)\ x' = \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$

3. Considerar en el plano el sistema $\begin{cases} \rho' = \rho(1-\rho) \\ \theta' = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$ escrito en coordenadas polares. Bosquejar las soluciones en el plano de fases. Hallar los puntos de equilibrio. Verificar la corrección de la afirmación hecha en clase: existe un entorno del punto de reposo $(1, 0)$ tal que toda solución que pase por dicho entorno tiende a $(1, 0)$ en el futuro, pero $(1, 0)$ no es estable.

4. Estudiar la estabilidad de los sistemas lineales del Ejercicio 6 del Práctico 5.

5. Discutir la estabilidad del sistema $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Investigar la estabilidad de las soluciones de la ecuación $x' = t - x^2$ (tener en cuenta el Ejercicio 5 del Práctico 4).

7. Para cada uno de los siguientes sistemas hallar a y b para que la derivada de Liapunov $\dot{V}$ de la función $V(x, y) = ax^4 + by^2$ sea definida negativa en el origen:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + xy \\ \dot{y} = -y^5 - x^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}$$

8. Considérese una partícula moviéndose bajo la influencia de una función potencial $P : \Omega \to \mathbb{R}$, $P \in C^2(\Omega)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es abierto, de manera que el movimiento está gobernado por la ecuación $x'' + \operatorname{grad} P(x) = 0$. Pasando al sistema correspondiente, se obtiene:

$$\begin{cases} x' = \nu \\ \nu' = -\operatorname{grad} P(x) \end{cases} .$$

Supóngase que (x_0, ν_0) es un punto de equilibrio (así que $\nu_0 = 0$). Para estudiar la estabilidad de este punto se considera la energía total del sistema:

$$E(x, \nu) = \frac{1}{2}\|\nu\|^2 + P(x)$$

(energía cinética más energía potencial). Se define entonces la función de Liapunov

$$V(x, \nu) := E(x, \nu) - E(x_0, \nu_0) = \frac{1}{2}\|\nu\|^2 + P(x) - P(x_0).$$

(a) Probar que la energía total es constante sobre las órbitas.

(b) Probar el teorema de Lagrange, según el cual el punto de equilibrio $(x_0, 0)$ es estable si x_0 es un mínimo local estricto de P.

$\boxed{\text{Entregar la parte (c) del Ejercicio 2.}}$

Fecha máxima de entrega: 10 de noviembre.