Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 6

1. Considerar la ecuación diferencial $x' = Ax + e^{\lambda t}v$, donde $Av = \lambda v$, $v \neq 0$ y A es una matriz $n \times n$ constante. Supóngase además que las multiplicidades algebraica y geométrica de λ coinciden. Mostrar que no hay ninguna solución de la forma $e^{\lambda t}w$, siendo w constante, pero en cambio sí hay alguna solución de la forma $e^{\lambda t}(w_1 + tw_2)$, con w_1 y w_2 constantes.

2. Resolver las ecuaciones siguientes: (1) $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$

   (2) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} x + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} x + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, mostrar que las componentes de cualquier solución φ de $x' = Ax$ son combinaciones lineales de funciones $t^j e^{ta} \cos tb$, $t^k e^{ta} \operatorname{sen} tb$, donde $\lambda := a + bi$ recorre el conjunto de valores propios de A y j, k son enteros no negativos y menores que el tamaño del mayor λ–bloque de la forma de Jordan de A.

4. Resolver las ecuaciones que siguen:

   (a) $\begin{cases} x'' - 4x' + 3x = 0 \\ x(0) = 6,\ x'(0) = 10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x''' - 3x'' + 3x' - x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 3 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x'' - 5x' + 6x = (12t - 7)e^{-t} \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x'' + 6x' + 9x = 10 \operatorname{sen} t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x''' - x' = -2t \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x'' - 4x' + 5x = \operatorname{sen} t \\ x \text{ acotada para } t \to \infty \end{cases}$

5. Sean φ_1 y φ_2 dos soluciones linealmente independientes de $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, donde p y q son funciones continuas definidas en el intervalo I. ¿Es posible que φ_1 y φ_2 tengan un extremo relativo simultáneo? Mostrar además que φ_1 y φ_2 tienen ambas un punto de inflexión en $t_0 \in I$ si y sólo si $p(t_0) = 0 = q(t_0)$.

6. *Teorema de separación de Sturm.* Si φ_1 y φ_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, entonces los ceros de φ_1 y φ_2 se alternan.

7. Resolver mediante series de potencias:

   (a) $x'' + tx' + x = 0$ (b) $\begin{cases} x'' + x' - tx = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x'' + x' - tx = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1 \end{cases}$