Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 4

1. Considérese $F : \mathbb{R}\times(0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $F(t,x,\lambda) = \lambda x^2$. Indicamos por $\big((\omega_-(t_0,x_0,\lambda_0), \omega_+(t_0,x_0,\lambda_0)), \varphi_{(t_0,x_0,\lambda_0)}\big)$ la solución máxima de $x' = F(t,x,\lambda_0)$, $x(t_0) = x_0$.

   (a) Hallar las soluciones maximales de $x' = F(t,x,\lambda)$ y los correspondientes intervalos maximales.

   (b) Hallar el conjunto $\mathcal{D} := \{(s,t,x,\lambda) \in \mathbb{R}^4 : t > 0, x > 0, \lambda > 0, s \in (\,\omega_-(t,x,\lambda), \omega_+(t,x,\lambda)\,)\}$. Mostrar directamente que $\mathcal{D}$ es abierto y que $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(s,t,x,\lambda) := \varphi_{(t,x,\lambda)}(s)$ es continua.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función continua tal que por cada punto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ pasa una única solución maximal de $x' = f_n(t,x)$. Supongamos que $f_n \to f_0$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$. Fijemos $t_0 \in \mathbb{R}$. Dado $z \in \mathbb{R}^m$ sea φ_n^z la solución máxima de

$$\begin{cases} x' = f_n(t,x) \\ x(t_0) = z. \end{cases}$$

   Para $s \in \mathbb{R}$ sean $A_n(s) := \{z \in \mathbb{R}^m : \varphi_n^z \text{ está definida en } s\}$ y $T_n : A_n(s) \to \mathbb{R}^m$ tal que $T_n(z) = \varphi_n^z(s)$, $\forall n \geq 0$, $z \in A_n(s)$.

   (a) Interpretar geométricamente la transformación T_n, y observar que si s' está entre t_0 y s entonces $A_n(s') \supseteq A_n(s)$.

   (b) Probar que $A_n(s)$ es abierto, y que si $A_0(s) \neq \emptyset$ existe n_s tal que $A_n(s) \neq \emptyset$, $\forall n \geq n_s$.

   (c) Probar que $B_n(s) := T_n(A_n(s))$ es abierto, y que $T_n : A_n(s) \to B_n(s)$ es un homeomorfismo.

   (d) Demostrar que si $K \subseteq A_0(s)$ es compacto, entonces existe n_K tal que si $n \geq n_K$, entonces $K \subseteq A_n(s)$, y que $(T_n\big|_K)_{n\geq n_K}$ converge a $T_0\big|_K$ uniformemente.

   (e) Para la sucesión $(f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})_{n\geq 1}$ dada por $f_n(t,x) = (x + \frac{1}{n})^2$, calcular los conjuntos $A_n(s)$ y verificar los hechos probados en las partes anteriores.

3. Probar el *Lema de Gronwall*[1]: si $u, v : [a,b] \to [0,\infty)$ son funciones continuas tales que para cierto $\alpha \geq 0$ se verifica

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds, \ \forall t \in [a,b],$$

[1] Una demostración del Lema de Gronwall, así como el Ejercicio 4, se pueden encontrar en el Capítulo 2 del libro de Sotomayor.

entonces para todo $t \in [a,b]$ se tiene $u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$. En particular si $\alpha = 0$ debe ser $u = 0$.

4. Usando el Ejercicio 3 probar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times X \to X$ es continua y $f \in \mathrm{Lip}_x(\Omega)$, con consatante de Lipschitz K, y si φ, ψ son las soluciones maximales de $x' = f(t,x)$ con $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$, definidas en los intervalos I_φ, I_ψ respectivamente, entonces $\forall t \in I_\varphi \cap I_\psi$ se tiene

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \, e^{K|t-t_0|}$$

5. Este ejercicio está dedicado a estudiar cualitativamente la ecuación $x' = t - x^2$.
   (a) Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.
   (b) Demostrar que para toda solución φ existe un instante $T_\varphi \geq 0$ tal que $\varphi(t) \leq \sqrt{t}$, $\forall t \geq T_\varphi$.
   (c) Para cada $c \in \mathbb{R}$ sea φ_c la solución maximal tal que $\varphi_c(0) = c$. Probar las siguientes afirmaciones:
      i. Si $c \geq 0$ entonces φ_c está definida para todo $t > 0$.
      ii. Existe $k < 0$ tal que para todo $c < k$ la solución φ_c tiende a $-\infty$ en tiempo finito.
      iii. Existe un único $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que φ_{c_0} está definida para todo $t > 0$ y $\lim\limits_{t \to \infty} (\varphi_{c_0}(t) + \sqrt{t}) = 0$.

Ejercicios optativos

En los ejercicios que siguen se usa el teorema de la aplicación contractiva para estudiar la continuidad de las soluciones de una ecuación diferencial con respecto a los parámetros.

6. Sean Λ un espacio topológico, M un espacio métrico completo, y para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $T_\lambda : M \to M$ tal que para cada $x \in M$ el mapa $\Lambda \to M$ tal que $\lambda \mapsto T_\lambda(x)$ es continuo. Supongamos además que para cada $\lambda_0 \in \Lambda$ existen un entorno V_{λ_0} y una constante $c_{\lambda_0} \in (0,1)$ tales que $d(T_\lambda(x), T_\lambda(y)) \leq c_{\lambda_0} d(x,y)$, $\forall x, y \in M$ y $\lambda \in V_{\lambda_0}$. Probar que si $f(\lambda)$ es el único punto fijo de la contracción T_λ, entonces la función $\lambda \mapsto f(\lambda)$ es continua.

7. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times X$ abierto, Λ un espacio topológico y $f : \Omega \times \Lambda \to X$ una función continua y localmente Lipschitziana con respecto a la segunda variable. Usar el Ejercicio 6 para estudiar la continuidad de la solución de $x' = f(t,x,\lambda)$, $x(t_0) = x_0$ con respecto a λ.

Entregar el Ejercicio 1.

Fecha máxima de entrega: 13 de octubre.