Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 3

1. Se considera la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mostrar que esta ecuación admite solución para cualquier condición inicial $y(x_0) = y_0$.

   (b) ¿f satisface localmente las condiciones del Teorema de Picard?

   (c) ¿Y las del Teorema de Peano?

2. Hallar, en función de la condición inicial (t_0, x_0), el intervalo maximal de definición de la solución correspondiente a las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x} = x^2 - 1 \qquad \dot{x} = \frac{1}{t^2-1} \qquad \dot{x} = x^2 \cos t \qquad \dot{x} = a(t)x,$$

   donde $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Hacer un bosquejo de las soluciones.

3. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t, x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$. Hallar las soluciones maximales de la ecuación diferencial $(x', y') = f(t, x, y)$. Mostrar que si la condición inicial $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ pertenece a $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, entonces la correspondiente solución maximal φ está acotada, y averiguar si existen $\lim \varphi(t)$ cuando $t \to \omega_-$ y cuando $t \to \omega_+$. Bosquejar las soluciones en el plano de fases, es decir, para cada solución maximal φ representar gráficamente el conjunto $\{\varphi(t) : t \in (\omega_-, \omega_+)\}$.

4. Sean $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, siendo f Lipschitziana. Probar que el sistema

$$\begin{cases} x' = f(x) & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x)y & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

   tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$. ¿Se puede obtener la misma conclusión sin la hipótesis de que f sea Lipschitziana?

5. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y Lipschitziana. Probar que dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existe una única solución definida en todo $\mathbb{R}$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

6. Sean $\Omega \in \mathbb{R}^2$ abierto y $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y localmente Lipschitzianas. Supongamos que para todo $(t, x) \in \Omega$ se cumple que $f_1(t, x) < f_2(t, x)$. Demostrar que si $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $x' = f_1(t, x)$, $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $x' = f_2(t, x)$, y además existe $c \in I_1 \cap I_2$ tal que $\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$, entonces se cumple que $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$ mayor que c. ¿Qué ocurre si t es menor que c?

7. Usando el ejercicio anterior demostrar que toda solución maximal de la ecuación $x' = t^2 + x^2$ está definida en un intervalo acotado.

8. Considérese la ecuación diferencial $x' = \cos(t + x)$. Bosquejar las soluciones maximales.

9. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\Omega := \{(t,x) : t_0 \le t \le t_0 + a, \mid x - x_0 \mid \le b\}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en Ω. Sea φ_n una solución de

$$(\text{✌}_n) \begin{cases} x' = f_n(t,x) \\ x(t_n) = x_n \end{cases}$$

en $[t_0, t_0 + a]$, donde $n = 1, 2, \ldots$ y $t_n \to t_0$, $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$. Probar que existe una subsucesión (φ_{n_k}) uniformemente convergente en $[t_0, t_0 + a]$, y que para cualquier subsucesión en esas condiciones, el límite $\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t)$ es una solución en $[t_0, t_0 + a]$ de

$$(\text{✌}) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En particular, si (✌) tiene una única solución en $[t_0, t_0 + a]$, entonces $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ uniformemente.

10. Con las mismas hipótesis y notaciones del Teorema de Peano, sean $c \in [t_0, t_0 + \alpha]$ y S_c el conjunto de los puntos z tales que existe una solución de

$$(\star) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida en $[t_0, c]$ y que pasa por (c, z). Probar que S_c es un intervalo cerrado, en el caso $n = 1$. (Sugerencia: sea (z_n) una sucesión de puntos en S_c tal que $z_n \to z$; si φ_n es solución de $(\star)$ con $\varphi_n(c) = z_n$, aplicar el Teorema de Arzelá–Ascoli para encontrar una solución φ de $(\star)$ tal que $\varphi(c) = z$. Para probar que S_c es conexo, sean $z_1, z_2 \in S_c$, y supóngase que $z_1 < z < z_2$; probar entonces que existe una solución ψ de $x' = f(t,x)$, $x(c) = z$ definida en $[t_0, c]$, eventualmente con $\psi(t_0) \ne x_0$, y construir a partir de ella una solución $\bar\varphi$ de $(\star)$ tal que $\bar\varphi(c) = z$).

    Nota: este resultado es conocido como *Teorema de Kneser* y es válido para $n \ge 1$ cualquiera, cambiando en el enunciado "S_c es un intervalo cerrado" por "S_c es conexo y compacto".

Entregar una solución de alguna de las partes del Ejercicio 2, y también una solución del Ejercicio 7.

Fecha máxima de entrega: 13 de Octubre.