Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 2

1. Sean M y N espacios métricos. Se dice que $x : M \to N$ es acotada si $x(M)$ está contenido en alguna bola de N. Considérese $F_b(M, N) := \{x : M \to N / \, x \text{ es acotada}\}$, con la distancia: $\rho(x, y) = \sup d_N(x(t), y(t))$, $\forall t \in M$.
   (a) Probar que ρ es efectivamente una métrica sobre $F_b(M, N)$.
   (b) Demostrar que si N es completo entonces $F_b(M, N)$ también lo es.
   (c) Sea $C_b(M, N) := \{x \in F_b(M, N) : \ x \text{ es continua}\}$. Probar que $C_b(M, N)$ es cerrado en $F_b(M, N)$, y deducir que si N es completo entonces $C_b(M, N)$ también lo es.

2. Averiguar si las siguientes son funciones Lipschitzianas o localmente Lipschitzianas en los dominios indicados:
   (a) $f : \mathbb{R} \times [1, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(t, x) = \frac{1}{x}$.
   (b) $f : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t, x) = \sqrt[3]{x}$.
   (c) $f : \big([-a, a] \times B(0, b)\big) \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(t, \mathsf{x}) = (x^2 y, t + z, z^2)$, donde $\mathsf{x} = (x, y, z)$.
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

3. Probar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times X \to X$ es continua y $f \in \operatorname{Lip} \operatorname{loc}_x(\Omega)$ entonces $f \in \operatorname{Lip}_x(K)$, para todo subconjunto compacto K de Ω.

4. Considérese el problema de Cauchy $\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$, y sean $a, b > 0$, $D_{a,b} = [-a, a] \times [-b, b]$.
   (a) Probar que existe una solución de este problema en $|t| \leq \min\{a, \frac{b}{a^2+b^2}\}$.
   (b) Mostrar que el máximo valor de $\frac{b}{a^2+b^2}$ para a fijo es $\frac{1}{2a}$.
   (c) Deducir que existe una solución en $[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

5. (a) Sea $f : D := [-a, a] \times [-b, b] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(t, x) < 0$ si $tx > 0$, y $f(t, x) > 0$ si $tx < 0$. Probar que $x = 0$ es la única solución de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ definida en un entorno de 0 y tal que $x(0) = 0$.
   (b) Considérese la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t, x) = \begin{cases} -2t & \text{si } x \geq t^2 \\ -2x/t & \text{si } |x| < t^2 \\ 2t & \text{si } x \leq -t^2 \end{cases}$
   Sea (y_n) la sucesión de iteradas de Picard: $y_0(t) = t^2$, $y_n(t) = \int_0^t f(s, y_{n-1}(s))ds$ para $n \geq 1$. Probar que la sucesión $(y_n(t))$ no converge para ningún $t \neq 0$, a pesar de que, según el ejercicio anterior, la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ tiene una única solución definida en algún entorno de 0 que satisface $x(0) = 0$.

Entregar el Ejercicio 4.

Fecha máxima de entrega: 15 de Setiembre.